

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

В.Г.Колобродов, Г.С. Тимчик

ПРИКЛАДНА ДИФРАКЦІЙНА ОПТИКА

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів*

КИЇВ
НТУУ «КПІ»
2014

УДК 535.42(075.8)+681.7(075.8)

ББК 22.343.4я73

К 60

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/11-12993 від 13.08. 2014 р.)*

Рецензенти:

О.В. Ангельський, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Чернівецький національний університет імені Федьковича

Л.В. Поперенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

С.В. Павлов, д-р техн. наук, проф.

Вінницький національний технічний університет

Колобродов В.Г.

К60 Прикладна дифракційна оптика: Підручник / В.Г. Колобродов,
Г.С. Тимчик. – К.: НТУУ „КПІ”, 2014. – 312 с.-300 пр.

ISBN 978-966-622-652-8

Викладено теоретичні і практичні основи проектування оптичних систем на основі скалярної теорії дифракції. Використано теорію дифракції Кірхгофа для аналізу когерентних і некогерентних систем, проектування дифракційних оптичних елементів, в тому числі офтальмологічної оптики, і спектроаналізаторів двовимірних сигналів. Для практичного засвоєння матеріалу значну увагу приділено розв'язанню прикладів розрахунку параметрів світлового поля, яке формується оптичними елементами і системами.

Для магістрів за напрямом оптотехніка за спеціальностями оптичні прилади і системи, фотоніка та оптоінформатика, лазерна та оптоелектронна техніка. Може бути корисним розробникам оптичних систем різного призначення.

УДК 535.42(075.8)+681.7(075.8)

ББК 22.343.4я73

ISBN 978-966-622-652-8

© В.Г. Колобродов

Г.С. Тимчик, 2014

© НТУУ"КПІ"(ПБФ), 2014

ЗМІСТ

Скорочення.....	8
Вступ.....	9
Розділ 1. Основні властивості оптичного випромінювання.....	12
1.1. Рівняння Максвелла.....	12
1.2. Хвильове рівняння.....	14
1.3. Плоскі й сферичні монохроматичні хвилі.....	15
1.4. Скалярні гармонічні хвилі. Рівняння Гельмгольца	17
1.5. Рівняння ейконалу й перенесення.....	18
1.6. Кутовий спектр плоских хвиль.....	19
1.7. Приклади розрахунку параметрів електромагнітного поля.....	21
1.8. Задачі для самостійного розв’язання.....	27
Розділ 2. Основи скалярної теорії дифракції.....	29
2.1. Загальні положення теорії дифракції.....	29
2.2. Принцип Гюйгенса–Френеля.....	30
2.3. Зонна пластинка Френеля.....	34
2.4. Теорія дифракції Кірхгофа.....	36
2.4.1. Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа.....	36
2.4.2. Дифракція на плоскому екрані.....	38
2.5. Дифракція Френеля.....	41
2.6. Дифракція Фраунгофера.....	43
2.7. Приклади розрахунку дифракції Фраунгофера.....	44
2.7.1. Прямокутний отвір.....	44
2.7.2.Круглий отвір.....	46
2.7.3.Синусоїдальна дифракційна ґратка.....	50
2.8. Дифракція Френеля на прямокутному отворі.....	52
2.9. Приклади розрахунку дифракційних картин.....	54
2.10. Задачі для самостійного розв’язання.....	62

Розділ 3. Дифракційний аналіз оптичних систем	69
3.1. Тонка лінза як елемент, що виконує фазове перетворення	69
3.2. Лінза як елемент, що виконує перетворення Фур'є.....	73
3.2.1. Поширення монохроматичного випромінювання через оптичну систему.....	73
3.2.2. Розподіл світлового поля у площині аналізу, коли транспарант встановлено перед лінзою.....	76
3.2.3. Розподіл світлового поля у площині аналізу, коли транспарант встановлено за лінзою.....	79
3.3. Дифракційна теорія формування зображення тонкою додатною лінзою.....	82
3.3.1. Функція розсіювання тонкої додатної лінзи	82
3.3.2. Функція розсіювання додатної лінзи у площині геометричного зображення.....	84
3.3.3. Зв'язок між амплітудами поля у площині зображення і площині предмета.....	85
3.4. Операторний метод аналізу когерентних оптичних систем.....	87
3.4.1. Узагальнена функція Френеля.....	87
3.4.2. Операторне представлення когерентної оптичної системи	91
3.4.3. Методика операторного аналізу.....	93
3.5. Приклади дифракційного аналізу оптичних систем.....	98
3.6. Задачі для самостійного розв'язання.....	109
Розділ 4. Частотний аналіз дифракційно обмежених оптичних систем.....	117
4.1. Узагальнена модель оптичної системи, яка формує зображення.....	117
4.2. Когерентні й некогерентні оптичні системи.....	119
4.2.1. Когерентне випромінювання.....	120
4.2.2. Вимірювання міри когерентності випромінювання... ..	122
4.1.1. Некогерентне випромінювання	125
4.3. Дифракційно обмежена когерентна оптична система.....	125

4.4. Дифракційно обмежена некогерентна оптична система.....	128
4.4.1. Оптична передавальна функція та її основні властивості.....	129
4.4.2. Зв'язок оптичної передавальної функції з фізичними параметрами оптичної системи.....	130
4.5. Приклади розрахунку передавальних функцій оптичних систем.....	135
4.6. Задачі для самостійного розв'язання.....	140
Розділ 5. Дифракційні оптичні елементи.....	147
5.1. Фізичні основи дифракційної оптики.....	147
5.1.1. Принцип роботи і класифікація ДОО.....	147
5.1.2. Дифракційна ефективність амплітудних і фазових ДОО... ..	154
5.1.3. Основні характеристики ДОО.....	155
5.1.4. Обернена задача дифракційної оптики.....	158
5.2. Габаритний розрахунок дифракційних лінз.....	159
5.3. Розрахунок дифракційних оптичних елементів у наближенні геометричної оптики.....	162
5.3.1. Загальні положення.....	162
5.3.2. Проектування кіноформу в параксіальному наближенні.	162
5.3.3. Фазова лінза, яка працює у збіжному світловому пучку.	170
5.3.4. Проектування лінз Френеля на сферичній поверхні.....	174
5.3.5. Проектування дифракційного дзеркала сферичної форми	182
5.4. Розрахунок дифракційних оптичних елементів в наближенні скалярної теорії дифракції.....	185
5.4.1. Загальні положення.....	185
5.4.2. Ітеративні методи розрахунку ДОО.....	186
5.4.3. Проектування ДОО методом послідовної ітерації – збіжності.....	189
5.4.4. Проектування ДОО, які формують радіально-симетричний розподіл освітленості.....	195
5.5. Багатопорядкові дифракційні лінзи.....	202

5.6. Дифракційно-рефракційні мультифокальні інтраокулярні лінзи	204
5.6.1. Біфокальні дифракційно-рефракційні інтраокулярні лінзи	204
5.6.2. Дифракційно-рефракційні лінзи з трикутним профілем...	207
5.6.3. Дифракційно-рефракційні лінзи з прямокутним профілем	208
5.6.4. Дифракційна інтраокулярна лінза.....	209
5.6.5. Особливості проектування дифракційно-рефракційних біфокальних лінз.....	213
5.6.6. Трифокальні дифракційні лінзи.....	218
5.7. Аберації дифракційних лінз.....	224
5.8. Ефективність і модуляційна передавальна функція дифракційної біфокальної лінзи.....	229
5.9. Окулярні рефракційно-дифракційні лінзи.....	235
5.10. Вимірювання оптичних характеристик дифракційних оптичних елементів.....	239
5.11. Приклади розрахунку параметрів дифракційних оптичних елементів.....	247
5.12. Задачі для самостійного розв'язання.....	268
Розділ 6. Когерентні спектроаналізатори	270
6.1. Фізичні основи роботи когерентних спектроаналізаторів...	270
6.1.1. Узагальнені оптичні схеми спектроаналізаторів.....	270
6.1.2. Функціональні перетворення в оптичних системах.....	273
6.2. Проектування спектроаналізаторів.....	279
6.2.1. Основні характеристики когерентних спектроаналізаторів	279
6.2.2. Енергетичний розрахунок когерентного оптичного спектроаналізатора.....	287
6.2.3. Роздільна здатність когерентного оптичного спектроаналізатора.....	293
6.3. Параксіальна дифракційна лінза, як оптичний елемент, що виконує перетворення Фур'є.....	300

6.4. Приклади розрахунку характеристик когерентних спектроаналізаторів.....	304
6.5. Задачі для самостійного розв'язання.....	307
Список літератури.....	309

СКОРОЧЕННЯ

ІОЛ	Інтраокулярна лінза
ДЛ	Дифракційна лінза
ДОЕ	Дифракційний оптичний елемент
ЕФВ	Ефективна фокусна відстань
КЕ	Кіноформний елемент
КПФ	Когерентна передавальна функція
КОС	Когерентний спектроаналізатор
МПФ	Модуляційна передавальна функція
ОПФ	Оптична передавальна функція
ПЗЗ	Прилад з зарядовим зв'язком
РДЛ	Рефракційно-дифракційної лінзи
ФКЕ	Функція концентрації енергії
ФРЛ	Функція розсіювання лінії
ФРТ	Функція розсіювання точки

ВСТУП

Світло – це електромагнітні хвилі з довжиною у межах від 1 нм до 1 мм, тому під час проходження світла через оптичні елементи його слід розглядати не як сукупність променів, а як хвильовий фронт, який змінюється у просторі й часі. Поширення електромагнітної хвилі розглядають з позиції дифракції світла. *Дифракція світла* у вузькому (найбільш вживаному) розумінні – явище обгинання променями світла контуру непрозорих тіл і, як наслідок, проникнення світла в область геометричної тіні. У широкому розумінні дифракція – це прояв хвильових властивостей світла в умовах, близьких до умов застосування положень геометричної оптики [1]. На основі такого уявлення про світло розробляють нові методи розрахунку оптичних систем, а також методи проектування принципово нових засобів оброблення інформації.

Першу елементарну кількісну теорію дифракції світла розвинув французький фізик О. Френель (1816), який пояснив її як результат інтерференції вторинних хвиль на основі принципу Гюйгенса–Френеля. Ідеї Френеля у математичному вигляді втілює німецький фізик Г. Кірхгоф (1882).

Головна перевага оптичних методів оброблення інформації – швидкодія і простота реалізації. Оброблення інформації в оптичних системах здійснюється із швидкістю світла й обмежується швидкістю пристроїв введення й виведення даних. В електронних пристроях, зокрема комп'ютерах, оброблення інформації відбувається у вигляді зміни в часі електричної напруги або струму, тобто у вигляді одновимірної функції. В оптичних системах перетворюються амплітуда і фаза (для когерентних систем) або інтенсивність (для некогерентних систем) світлового поля, які змінюються у просторі й часі. Це означає, що оброблення інформації здійснюється у вигляді багатовимірних функцій. У зв'язку з цим потенційні можливості оптичних систем оброблення інформації значно ширші за можливості електронних систем. Крім того, в оптичних системах

оброблення інформації порівняно просто реалізуються такі операції, як перетворення Фур'є, просторова фільтрація, низка інтегральних перетворень (кореляція, згортка, перетворення Гільберта, Лапласа та ін).

Під час проходження світла через елементи оптичної системи відбувається деформація хвильового фронту у часі і просторі. На основі аналізу цих деформацій можна якісно та точно оцінити вплив різних факторів на процеси перенесення інформації в оптичній або оптично-електронній системах. Також це дозволяє розробити принципово нові засоби оброблення інформації й суттєво вдосконалити безпосередньо оптичні елементи.

Теоретичним фундаментом оптичної обробки інформації є дифракційна теорія оптичних систем – основа цього підручника. Практичне застосування дифракції світла відображене у розробленні методів розрахунку параметрів світлового поля, яке формує когерентна або некогерентна система.

Ми припускаємо, що читач цього підручника добре знайомий з основами хвильової оптики, вищої математики та обчислювальної техніки. Складні диференціальні та інтегральні рівняння дифракційної оптики зведені до відносно простих співвідношень, які можна застосовувати при дослідженні розповсюдження світла через оптичну систему та проектуванні дифракційних оптичних елементів (ДОЕ). Теоретичний матеріал може бути використаний при проектуванні оптичних систем та виготовленні ДОЕ. В більшості випадків достатньо використовувати скалярну теорію дифракції, але при зменшенні геометричних розмірів мікроструктури ДОЕ до довжини хвилі світла необхідно розглядати векторний характер електромагнітного поля світла.

Інтенсивний розвиток науки і техніки постійно ускладнює задачі, які стоять перед оптикою і оптичним приладобудуванням. З одного боку, пред'являються більш високі вимоги до традиційних характеристик оптичних пристроїв (великі роздільна здатність і поле зору, широкий спектральний діапазон і т.п.), а з другого боку, з'явилися нові сфери

застосування оптики: пристрої оптичної обробки інформації, волоконна та інтегральна оптики і т.п. Розв'язання цих задач йде трьома напрямками: використання асферичних оптичних поверхонь; розробка градієнтних лінз із змінним показником заломлення і проектування та розробка технології виготовлення дифракційних оптичних елементів (ДОЕ).

Сучасний розвиток дифракційної оптики фактично виходить на рівень, коли вона стає таким же невід'ємним компонентом оптичних систем, як лазери та світлодіоди. Інтегрованість напівпровідникових джерел та приймачів випромінювання, дифракційних та волоконних елементів і мікропроцесорної техніки відкриває можливості створення мікрооптоелектронних систем для вирішення широкого спектру задач оптотехніки та оптоінформатики.

Цей підручник присвячено проектуванню дифракційних оптичних елементів та систем на основі скалярної теорії дифракції. Він є подальшим розвитком і удосконаленням підручників Колобродова В.Г. і Тимчика Г.С. «Дифракційна теорія оптичних систем» (2011р.) і «Проектування дифракційних оптичних елементів і систем» (2013р.). Підручник написано на основі курсу лекцій «Дифракційна теорія оптичних систем», який викладається в Національному технічному університеті України «КПІ» для магістрів напрямку «Оптотехніка» із спеціальності «Фотоніка та оптоінформатика».

Розділ 1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

1.1. Рівняння Максвелла

У хвильовій оптиці світло являє собою електромагнітне поле, яке змінюється в часі і просторі. *Оптичним випромінюванням* називаються електромагнітні хвилі з довжиною хвилі λ від 1 нм (10^{-9} м) до 1 мм (10^{-3} м) [1]. Згідно міжнародного стандарту DIN 5031, В1.7 світло, у широкому розумінні, має довжину хвилі від 100 нм до 1 мм, а видиме випромінювання або світло у вузькому розумінні, займає спектральний діапазон від 380 нм до 780 нм.

В основі електромагнітної теорії світла лежить система рівнянь Максвелла, яка встановлює зв'язок між напруженістю електричного $\vec{E}(x, y, z, t)$ і магнітного $\vec{H}(x, y, z, t)$ полів та їх індукціями $\vec{D}(x, y, z, t)$ і $\vec{B}(x, y, z, t)$. Електричні та магнітні властивості середовища характеризуються діелектричною ϵ та магнітною μ проникністю і питомою електричною провідністю σ .

Указані чотири вектори електромагнітного поля пов'язані між собою рівняннями Максвелла, які виконуються у кожній точці, де фізичні властивості середовища неперервні. Повна система рівнянь Максвелла в диференціальній формі має вигляд

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad (1.1)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \quad (1.2)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho; \quad (1.3)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

де $\vec{j}(x, y, z, t)$ – щільність струму провідності; ρ – щільність електричних зарядів.

Щоб за заданого розподілу зарядів за допомогою рівнянь Максвелла визначити вектори електромагнітного поля, систему рівнянь доповнюють

матеріальними рівняннями, які враховують реакцію середовища на зовнішнє електромагнітне поле. Для ізотропного середовища ці рівняння мають вигляд

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.5)$$

де ε_0 , μ_0 – електрична і магнітна сталі, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{Ф} \cdot \text{м}^{-1}$, $\mu_0 = 1,257 \text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}$.

Перші два матеріальні рівняння (1.5) пов'язують напруженість та індукцію електричного і магнітного полів, а третє рівняння – це закон Ома в диференціальній формі.

Перше рівняння (1.1) являє собою узагальнений закон електромагнітної індукції Фарадея: зміна магнітного поля у часі викликає появу електричного поля, причому електричне поле існує незалежно від наявності в ньому провідника. Знак «–» у рівнянні (1.1) означає, що електричне поле намагається компенсувати магнітне поле, яке його викликало.

Рівняння (1.2) означає, що магнітне поле утворюється за рахунок зміни у часі електричного поля та електричного струму.

Рівняння (1.3) означає, що електричне поле утворюється зарядами, на яких починаються і закінчуються силові лінії поля.

Рівняння (1.4) свідчить про те, що немає магнітних зарядів, а силові лінії магнітного поля замкнені.

Оптичні середовища є діелектриками, для яких $\sigma = 0$, $\mu = 1$, $\vec{j} = 0$. На межі двох діелектриків значення параметра ε змінюється дискретно. Для аналізу процесу поширення оптичного випромінювання через межу двох діелектриків використовують граничні умови, які пов'язують тангенціальні проекції векторів електромагнітного поля на межі двох середовищ:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (1.6)$$

Умови (1.6) використовують для визначення зміни параметрів електромагнітного поля, яке поширюється у різних середовищах.

1.2. Хвильове рівняння

Рівняння Максвелла (1.1)–(1.4) пов'язують між собою вектори \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} і \vec{B} електромагнітного поля. Диференціальні рівняння, яким повинен задовольняти кожен із векторів, можна отримати вилученням інших векторів.

Запишемо перші два рівняння Максвелла для однорідного та ізотропного діелектрика, використовуючи матеріальні рівняння (1.5):

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \text{rot} \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Візьмемо похідну за t від правої і лівої частин другого рівняння:

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Підставимо у це рівняння $\partial \vec{H} / \partial t$ із першого рівняння системи (1.7):

$$-\frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Використаємо відому тотожність векторного аналізу

$$\text{rot}(\text{rot}) = \text{grad}(\text{div}) - \Delta, \quad (1.8)$$

де Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Тоді, з урахуванням рівняння (1.3) та (1.8), остаточно отримаємо

$$\Delta \vec{E} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.9)$$

Аналогічне рівняння можна отримати і для напруженості магнітного поля \vec{H} :

$$\Delta \vec{H} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.9) і (1.10) називають *хвильовими рівняннями*. Із цих рівнянь випливає, що існують електромагнітні хвилі, які поширюються зі швидкістю

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (1.11)$$

Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у вакуумі, для якого $\varepsilon = \mu = 1$, дорівнює $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Цей результат практично

співпадає з експериментально отриманим значенням швидкості світла, який становить $c = 299792456$ м/с.

1.3. Плоскі і сферичні монохроматичні хвилі

Знайдемо розв'язок хвильового рівняння (1.9) для різних випадків поширення світла [2]. Припустимо, що електричне поле залежить лише від однієї координати x і часу t , тоді рівняння (1.9) з урахуванням (1.11) матиме вигляд

$$\Delta \vec{E}(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

Одним із можливих розв'язків цього рівняння є *плоска монохроматична хвиля*

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right], \quad (1.13)$$

де \vec{E}_0 – амплітуда; φ_0 – початкова фаза; ω – циклічна частота, $\omega = 2\pi\nu$, де ν – частота, Гц;

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0, \quad (1.14)$$

де φ – фаза хвилі.

Розподіл напруженості поля у плоскій монохроматичній хвилі зображено на рис. 1.1. Якщо у рівнянні (1.13) зафіксувати час $t = t_0$, то залежність поля від координати x дає «фотографію» хвилі – розподіл напруженості поля у просторі. Нехай у момент часу t_0 точка з фазою φ_0 має координату x_0 . Тоді у момент часу $t_0 + \Delta t$ точка з цією фазою зміститься на відстань $\Delta x = v\Delta t$. Якщо $\Delta x > 0$, то хвиля поширюється уздовж додатного напрямку осі x . Щоб отримати рівняння хвилі, яка поширюється уздовж від'ємного напрямку осі x , достатньо змінити знак у виразі для фази (1.14):

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi_0. \quad (1.15)$$

Отже, параметр v більш точно називати не просто швидкістю, а *фазовою швидкістю*, яка визначає швидкість переміщення хвильового

фронту, тобто поверхні, на якій коливання відбуваються з однаковою фазою (1.15). У випадку, що розглядається, хвильовий фронт є плоским, перпендикулярним до осі x , де $x = x_0$.

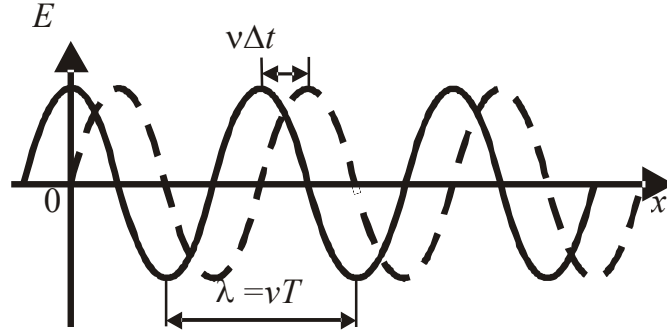


Рис. 1.1. Поширення монохроматичної хвилі

Поле хвилі (1.13) за умови $\varphi_0 = 0$ можна подати в іншому вигляді:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - 2\pi vt), \quad (1.16)$$

де k – хвильове число, см^{-1} , $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$.

Дослідження монохроматичного світла суттєво спрощуються, якщо подати вираз (1.16) у комплексному вигляді:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp[j(kx - 2\pi vt)]. \quad (1.17)$$

У багатьох випадках виникає потреба досліджувати поширення плоскої хвилі не уздовж осі x , а в деякому довільному напрямку. Нехай цей напрямок задається одиничним вектором нормалі \vec{N} до хвильового фронту (рис. 1.2). Тоді рівняння поверхні сталої фази можна записати у вигляді $\vec{r}\vec{N} = r_0 = \text{const}$, де \vec{r} – радіус-вектор, який визначає координати довільної точки P хвильового фронту.

Отже, у рівнянні плоскої хвилі (1.17) замість x слід записати скалярний добуток $\vec{r}\vec{N}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[j(\vec{k}\vec{r} - 2\pi vt)], \quad (1.18)$$

де \vec{k} – хвильовий вектор, довжина якого дорівнює хвильовому числу, а орієнтація вказує напрямок переміщення хвильового фронту, $\vec{k} = k\vec{N}$.

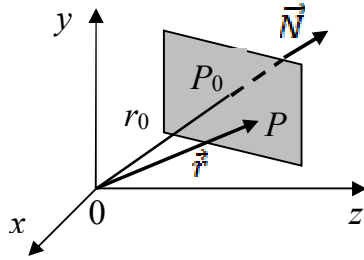


Рис. 1.2. Поширення фронту плоскої хвилі

Хвильові фронти *сферичних хвиль* являють собою концентричні сфери. Аналіз цих хвиль зручно виконувати у сферичній системі координат r, θ, φ . Сферичні хвилі є таким розв'язком хвильового рівняння (1.9), який залежить лише від відстані r і не залежить від кутових координат θ, φ .

У сферичній системі координат радіальну частину оператора Лапласа можна записати у

вигляді

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \vec{E}). \quad (1.19)$$

Тоді хвильове рівняння з урахуванням (1.19) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \vec{E}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \vec{E}). \quad (1.20)$$

Рівняння (1.20) збігається з рівнянням (1.12), якщо замінити \vec{E} на $(r \vec{E})$. Його розв'язок аналогічний виразу (1.18):

$$\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp[j(kr - 2\pi vt)] = \vec{E}(r) \exp(-j2\pi vt), \quad (1.21)$$

де \vec{E}_0 – амплітуда сферичної хвилі за $r = 1$; $\vec{E}(r)$ – змінна амплітуда сферичної хвилі, яка залежить лише від радіуса r ,

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(jkr). \quad (1.22)$$

Рівняння (1.21) описує монохроматичну сферичну хвилю, що поширюється від центра системи координат.

Амплітуда сферичної хвилі, що збігається до центра системи координат, описується функцією

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(-jkr). \quad (1.23)$$

1.4. Скалярні гармонічні хвилі. Рівняння Гельмгольца

Між амплітудами електричного E_0 і магнітного H_0 полів існує зв'язок:

$$E_0 \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu \mu_0}.$$

У межах скалярної теорії дифракції не розглядають взаємозв'язку між векторами електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів за допомогою рівнянь Максвелла, а враховують лише скалярну амплітуду $V(x, y, z, t)$ одного з поперечних компонентів електричного або магнітного полів.

Ця амплітуда задовольняє однорідному хвильовому рівнянню

$$\Delta V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (1.24)$$

Найбільш простим розв'язком цього рівняння є *скалярна монохроматична хвиля*, яку можна подати аналогічно рівнянню (1.18) або (1.21) у вигляді

$$V(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \exp(-j2\pi vt). \quad (1.25)$$

Функцію (1.25) називають комплексним *оптичним сигналом*.

Запишемо хвильове рівняння (1.24) для монохроматичної хвилі (1.25):

$$\Delta V(\vec{r}) \exp(-2\pi vt) - \frac{1}{v^2} V(\vec{r}) (-j2\pi v)^2 \exp(-j2\pi vt) = 0,$$

звідки

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0. \quad (1.26)$$

Вираз (1.26) називають *рівнянням Гельмгольца*, його розв'язок дає змогу визначити амплітуду поля $V(\vec{r})$ у довільній точці простору, яку задано радіусом-вектором $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$, для монохроматичного світла.

1.5. Рівняння ейконалу й переносу

Запишемо комплексну функцію $V(\vec{r})$ у вигляді

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z) = V_0(x, y, z) \exp[jk_0\psi(x, y, z)], \quad (1.27)$$

де $V_0(x, y, z)$ – дійсна амплітуда поля; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – хвильове число; λ_0 – довжина хвилі в вакуумі; $\psi(x, y, z)$ – оптична довжина шляху, що проходить хвиля від джерела випромінювання до точки $P_0(x, y, z)$, яку називають *ейконалом*. Підставимо функцію (1.27) у рівняння Гельмгольца (1.26)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} + 2jk_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) + \\ & + jk_0 V_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - k_0^2 V_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + k_0^2 \epsilon \mu V_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Дорівнюючи до нуля уявну частину рівняння (1.28), отримаємо рівняння перенесення:

$$2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) + V_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (1.29)$$

Дорівнюємо дійсну частину рівняння (1.28) до нуля:

$$\frac{1}{k_0^2} \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \right) - V_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + \varepsilon \mu V_0 = 0. \quad (1.30)$$

В наближенні геометричної оптики, коли $\lambda \rightarrow 0$, маємо $1/k_0^2 \rightarrow 0$. Тоді вираз (1.30) набуде вигляду

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = n^2, \quad (1.31)$$

де n – показник заломлення, $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$. Співвідношення (1.31) називають рівнянням *ейконалу*.

1.6. Кутовий спектр плоских хвиль

Розглянемо монохроматичне світло, яке поширюється вздовж осі z , у площині xy за $z = 0$ (рис. 1.3). Нехай амплітуда поля у цій площині описується функцією $V(x, y, 0)$. Визначимо амплітуду світлового поля $V(x, y, z)$ в довільній точці $P(x, y, z)$.

У площині xy просторовий спектр розподілу амплітуди $V(x, y, 0)$ поля визначається двовимірним перетворенням Фур'є:

$$\tilde{V}(v_x, v_y) = F\{V(x, y, 0)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y, 0) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy, \quad (1.32)$$

де v_x, v_y – просторові частоти.

У цьому випадку функцію $V(x, y, 0)$ можна подати у вигляді інтеграла Фур'є:

$$V(x, y, 0) = F^{-1}\{\tilde{V}(v_x, v_y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(v_x, v_y) \exp[j2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y. \quad (1.33)$$

Розглянемо рівняння для комплексної скалярної амплітуди плоскої хвилі (1.18), яке має вигляд

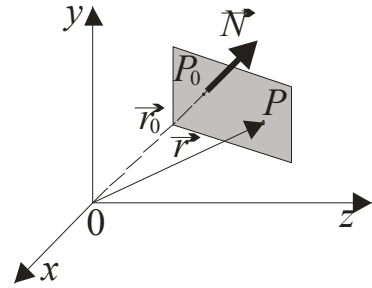


Рис. 1.3. До визначення кутового спектра плоских хвиль

$$V(\vec{r}) = V_0 \exp[j(\vec{k}\vec{r})], \quad (1.34)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$; $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – орти уздовж відповідних осей; \vec{k} – хвильовий вектор, $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{x}_0 \cos\alpha + \vec{y}_0 \cos\beta + \vec{z}_0 \cos\gamma)$; α, β, γ – кути між напрямком поширення плоскої хвилі і відповідними осями (рис. 1.3).

Для амплітуди $V_0 = 1$ рівняння (1.34) має вигляд

$$V(\vec{r}) = \exp[j \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)]. \quad (1.35)$$

Якщо плоска хвиля поширюється у площині yz (рис. 1.4), то вона має амплітуду

$$V(\vec{r}) = \exp[j2\pi(y \frac{\cos\beta}{\lambda} + z \frac{\cos\gamma}{\lambda})].$$

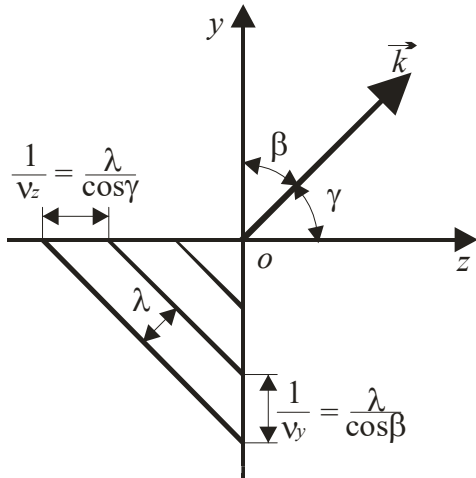


Рис. 1.4. Поширення плоскої хвилі

Порівнюючи рівняння (1.35) і (1.33) дійдемо висновку, що експоненту у рівнянні (1.33) можна розглядати як плоску хвилю одиничної амплітуди, напрямок поширення якої визначається кутами α, β, γ ,

$$V(\vec{r}) = \exp[j2\pi(x \frac{\cos\alpha}{\lambda} + y \frac{\cos\beta}{\lambda})]. \quad (1.36)$$

При цьому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$, а просторовий спектр $\tilde{V}(v_x, v_y) = \tilde{V}(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda})$ називають

кутовим спектром світлового поля. Це означає, що під час спектрального аналізу розподілу світлового поля у довільній площині його окремі просторові складові можна ототожнювати з плоскими хвилями (1.36), які поширюються в різних напрямках. Амплітуду поля в довільній точці можна обчислити як результат інтерференції, тобто складанням амплітуд цих плоских хвиль з урахуванням фазових зсувів, яких вони набувають, коли досягають певної точки.

Розглянемо поширення кутового спектра від площини $xу$ на відстань z .
Визначимо амплітуду поля в точці $P(x, y, z)$ у вигляді інтеграла Фур'є (1.33):

$$V(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(v_x, v_y, z) \exp[j2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y. \quad (1.37)$$

Функція (1.37) задовольняє рівняння Гельмгольца (1.26). Підставивши інтеграл (1.37) у вираз (1.26), знаходимо, що функція $V(x, y, z)$ має задовольняти диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(v_x, v_y, z)}{\partial z^2} + k^2(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta) \tilde{V}(v_x, v_y, z) = 0. \quad (1.38)$$

Розв'язком рівняння (1.38) є функція

$$\tilde{V}(v_x, v_y, z) = \tilde{V}(v_x, v_y, 0) \exp(jkz \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}). \quad (1.39)$$

Із співвідношення (1.39) знаходимо передавальну функцію, яка характеризує поширення світла у вільному (без перешкод) просторі на відстань z :

$$\begin{aligned} H_{fs}(v_x, v_y) &= \frac{\tilde{V}(v_x, v_y, z)}{\tilde{V}(v_x, v_y, 0)} = \exp(jkz \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}) = \\ &= \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - (\lambda^2 v_x^2 + \lambda^2 v_y^2)} \right]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

де v_x, v_y – просторові частоти, $v_x = \frac{\cos \alpha}{\lambda}$; $v_y = \frac{\cos \beta}{\lambda}$.

1.7. Приклади розрахунку параметрів електромагнітного поля

Приклад 1.1. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на поверхню плоскопаралельного шару немагнітної речовини товщиною h , діелектрична проникність якого експоненційно падає від значення ϵ_1 на передній поверхні до ϵ_2 на задній. Знайдіть час поширення такої хвилі через цей шар.

Розв'язання. Швидкість поширення фази хвилі згідно з виразом (1.11) $v = c/\sqrt{\mu\epsilon}$. Оскільки середовище немагнітне, то $\mu = 1$. За умовою діелектрична проникність не стала величина, її значення залежить від відстані від поверхні шару, тому швидкість теж не буде сталою величиною. Якщо сумістити

передню поверхню плоскопаралельного шару з початком координат, то залежність діелектричної проникності від координати x матиме вигляд

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 \exp\left(-\frac{a}{h}x\right).$$

Тоді, якщо $x = h$, то $\varepsilon = \varepsilon_2$, звідки $a = \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$. Це означає, що швидкість поширення хвилі у заданому середовищі теж залежить від координати x .

Якщо поділити шар на проміжки, де швидкість можна вважати сталою величиною, то час, потрібний для того, щоб пройти елементарний проміжок,

$$dt = \frac{dx}{v(x)} = \frac{dx}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \exp\left(-\frac{a}{h}x\right)}.$$

Тоді час поширення світла через шар визначається як інтеграл

$$t = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \int_0^h \exp\left(-\frac{a}{2h}x\right) dx = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \left(-\frac{2h}{a}\right) \exp\left(-\frac{a}{2h}x\right) \Big|_0^h = \frac{2h}{c \ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)} (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}).$$

Приклад 1.2. У вакуумі поширюється плоска світлова хвиля $\vec{E}(x, t) = \vec{y}_0 E_0 \cos(\omega t - kx)$, де \vec{y}_0 – орт осі y , $E_0 = 160$ В/м, $k = 0,51$ м⁻¹. Знайдіть вектор \vec{H} в точці з координатою $x = 7,7$ м в момент часу: а) $t = 0$; б) $t = 33$ нс.

Розв'язання. Запишемо рівняння Максвелла (1.2) для вакууму в розгорнутому вигляді:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \vec{y}_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

звідки

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

З умови прикладу маємо:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx),$$

звідки

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \int \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx) dx = \frac{\varepsilon_0 E_0 \omega}{k} \cos(\omega t - kx) = \\ &= c \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Тоді значення вектора у відповідних точках:

$$a) H(7,7;0) = c\varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kx) = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 160 \text{ В/м} \times \\ \times \cos(-0,51 \text{ м}^{-1} \cdot 7,7 \text{ м}) = -0,30 \text{ А/м};$$

$$б) H(7,7;33 \cdot 10^{-9}) = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 160 \times \\ \times \cos(0,51 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 33 \cdot 10^{-9} - 0,51 \cdot 7,7) = 0,18 \text{ А/м}.$$

Приклад 1.3. В однорідному та ізотропному середовищах за $\varepsilon = 3$ та $\mu = 1$ поширюється плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 10$ В/м. Знайдіть амплітуду напруженості магнітного поля і фазову швидкість хвилі.

Розв'язання. Між амплітудами електричного E_0 і магнітного H_0 полів є зв'язок:

$$E_0 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu \mu_0}, \quad (1.41)$$

де ε_0 – електрична стала, $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; μ_0 – магнітна стала, $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Із рівняння (1.41) маємо:

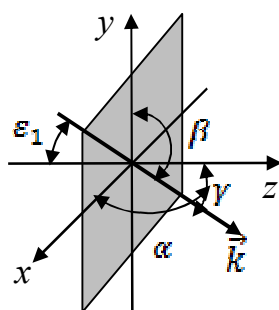
$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12}}{1 \cdot 1,2566 \cdot 10^{-6}}} 10 = 0,046 \text{ А/м}.$$

Під час отримання розмірності було враховано, що $\text{Ф} = \text{Кл/В}$ і $\text{Гн} = \text{В} \cdot \text{с/А}$.

Фазову швидкість хвилі розрахуємо за формулою (1.11):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3}} = 1,73 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Приклад 1.4. На плоский екран, розміщений у площині xu , падає під кутом $\varepsilon_1 = 1^\circ$ плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 0,628$ мкм). Хвильовий вектор \vec{k} лежить у площині yz . Знайдіть розподіл амплітуди поля у площині екрана.



Розв'язання. Амплітуду поля плоскої хвилі визначають за рівнянням (1.29), яке подамо у вигляді

$$V(x, y, z) = V_0 \exp[j(\vec{k}\vec{r})]. \quad (1.42)$$

Запишемо скалярний добуток двох векторів $\vec{k}\vec{r}$, використовуючи рис. 1.5, з якого видно, що хвильовий вектор \vec{k} утворює такі кути з осями x, y, z : $\alpha = \pi/2$; $\beta = \pi/2 + \varepsilon_1$; $\gamma = \varepsilon_1$. Оскільки екран розміщений у площині xy , для будь-якої точки екрана $z = 0$. Тоді рівняння (1.42) набуде вигляду

$$V(x, y, 0) = V_0 \exp\left(-j \frac{2\pi \sin \varepsilon_1}{\lambda} y\right).$$

У дійсній формі цей розподіл запишемо як

$$V(x, y, 0) = V_0 \cos\left(\frac{2\pi \sin \varepsilon_1}{\lambda} y\right).$$

З останнього виразу випливає, що амплітуда світлового поля має максимуми і мінімуми, розміщені паралельно осі x .

Приклад 1.5. Запишіть рівняння сферичної хвилі (1.22) у квадратичному наближенні, коли точкове джерело розміщене на значній відстані від площини спостереження, а область спостереження перебуває біля оптичної осі. Для цього скористайтесь наближенням $\sqrt{1 + \xi} \approx 1 + \xi/2$, яке справедливе за $\xi \ll 1$.

Розв'язання. Сферична хвиля описується рівнянням (1.22), яке подамо у вигляді

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(jkr).$$

Оберемо систему координат, як показано на рис. 1.6. Нехай точкове джерело світла розміщене на відстані $-z$ від площини спостереження xy . Тоді радіус $r = SP$ становитиме

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}.$$

Оскільки $z^2 \gg x^2 + y^2$, то останній вираз наближено можна записати як

$$r \approx z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}\right). \quad (1.43)$$

Це є *квадратичне наближення* для радіуса r . Підставивши наближення

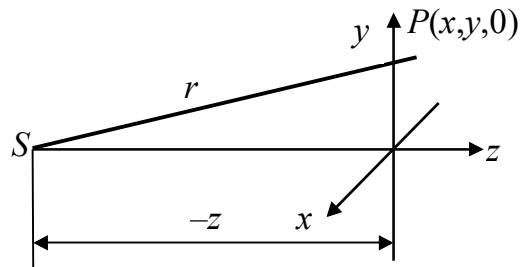


Рис. 1.6. До прикладу 1.5

(1.43) у рівнянні (1.22) отримаємо вираз для сферичної хвилі у квадратичному наближенні:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{E}_0}{z} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] = \frac{\vec{E}_{0k}}{z} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right], \quad (1.44)$$

де \vec{E}_{0k} – комплексна амплітуда поля, $\vec{E}_{0k} = \vec{E}_0 \exp(jkz)$.

Приклад 1.6. Просторовий фільтр зі змінними в часі характеристиками можна реалізувати за допомогою інтерферометра Фабрі-Перо. Фільтр складається з тонких прозорих скляних пластинок, що використовуються як підкладки, на внутрішній поверхні яких нанесено речовину з високим коефіцієнтом відбиття (рис. 1.7). Плоска монохроматична хвиля падає перпендикулярно до поверхні однієї зі скляних пластин.

Доведіть, що комплексна амплітуда хвилі, яка проходить через фільтр, описується функцією

$$E(\omega) = K t_p^2 \exp\left(-\frac{j\omega d}{c}\right) / \left[1 - \rho_p^2 \exp\left(-\frac{j2\omega d}{c}\right)\right],$$

де ω – частота падаючої плоскої хвилі; c – швидкість поширення світла; d – відстань між скляними пластинами; K – константа; ρ_p і t_p – відповідні амплітудні коефіцієнти відбиття і пропускання пластин. Впливом скляних пластин знехтувати.

Розв'язання. Нехай на першу пластинку інтерферометра нормально падає плоска монохроматична хвиля $E(t) = E_0 \exp(-j\omega t)$. Після проходження першої пластинки вона матиме амплітуду $E'_0 = E_0 t_p$, де t_p – амплітудний коефіцієнт пропускання пластинки. На другу пластинку буде падати хвиля з амплітудою $E''_0 = E'_0 \exp(-j\Delta\varphi) = E_0 t_p \exp(-j\Delta\varphi)$, де

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{\omega d}{c} \quad (1.45)$$

– фазовий зсув, що виникає при проходженні хвилі від однієї платини до другої; d – відстань між пластинами; c – швидкість світла.

Одна частина хвилі E''_0 проходить через другу пластину і має амплітуду $E_{01} = E''_0 t_p = E_0 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)$, а друга частина відбивається і має амплітуду

$E'_{01} = E''_0 \rho_p = E_0 t_p \rho_p \exp(-j\Delta\varphi)$, де ρ_p – амплітудний коефіцієнт відбиття пластинки.

Після відбиття від першої пластинки і проходження через другу світлова хвиля має амплітуду

$$E_{02} = E'_{01} \rho_p t_p = E_0 \rho_p^2 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi) \exp(-2j\Delta\varphi).$$

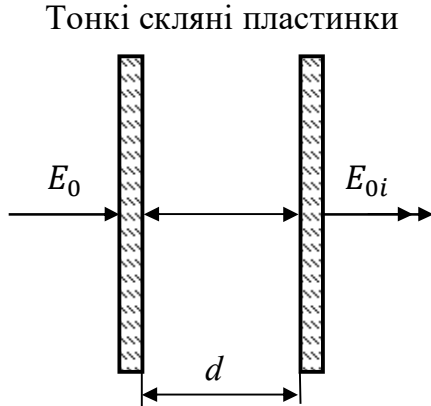


Рис. 1.7. До прикладу 1.6

В результаті багаторазового відбиття між пластинами на виході інтерферометра утворюється велика кількість когерентних хвиль, які розповсюджуються в одному напрямку. Між цими хвилями відбувається інтерференція, в результаті якої утворюється результуюча амплітуда

$$E_{int} = E_{01} + E_{02} + \dots + E_{0i} + \dots, \quad (1.46)$$

де

$$E_{0i} = E_0 \rho_p^{2(i-1)} t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi) \exp[-2j(i-1)\Delta\varphi].$$

Вираз (1.41) являє собою суму нескінченної геометричної прогресії, яка визначається за формулою

$$E_{int} = \frac{a_1}{1-q}, \quad (1.47)$$

де $a_1 = E_0 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)$; $q = \rho_p^2 \exp(-j2\Delta\varphi)$ – знаменник прогресії. Тоді

$$E_{int} = \frac{E_0 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)}{1 - \rho_p^2 \exp(-j2\Delta\varphi)}.$$

З врахуванням (1.40) маємо

$$E_{int} = \frac{E_0 t_p^2 \exp\left(-j\frac{\omega d}{c}\right)}{1 - \rho_p^2 \exp\left(-j2\frac{\omega d}{c}\right)}.$$

Отримана формула відповідає умові задачі, коли $K = E_0$, що треба було довести.

1.8. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.1. Частота електромагнітного випромінювання (світла) $\nu = 6,91 \cdot 10^{14}$ Гц. Знайдіть значення довжини хвилі цього світла у повітрі, який колір має світло?

Відповідь: $\lambda = 434,1$ нм. Синій.

Задача 1.2. Під час поширення в якому середовищі світло з частотою $\nu = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ буде мати довжину хвилі $\lambda = 500$ нм?

Відповідь: $n = \frac{c}{\lambda \nu} = 1,5$.

Задача 1.3. Який шлях пройде фронт хвилі монохроматичного світла у вакуумі за час, протягом якого він проходить шлях $l_1 = 1$ м у склі марки ТФ1 ($n_e = 1,652$)?

Відповідь: $l_2 = l_1 n_e = 1,652$ м.

Задача 1.4. Скільки довжин хвиль монохроматичного світла з частотою коливань $\nu = 6,17 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ розмістяться на шляху довжиною $l = 2,0$ мм: а) у вакуумі; б) у склі марки ЛКЗ ($n_e = 1,4891$).

Відповідь: $N = \frac{l}{\lambda} = \frac{l \nu n}{c}$; $N_v = 4113$; $N_g = 6125$.

Задача 1.5. Світлова хвиля з амплітудою напруженості магнітного поля $H_0 = 0,05$ А/м поширюється у середовищі з показником заломлення $n = 1,5$. Визначте амплітуду напруженості електричного поля.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 1.3 (с. 21).

Відповідь: $E_0 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 = 12,6$ В/м.

Задача 1.6. На непрозорий екран із прямокутним отвором розміром 4×2 мм падає під кутом $\epsilon = 0,1^\circ$ плоска монохроматична хвиля з амплітудою $E_0 = 1$ В/м і частотою $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Отвір розміщений у центрі системи координат xu . Хвильовий вектор \vec{k} лежить у площині xz . Знайдіть розподіл амплітуди поля $E(x, y)$ в отворі екрана. Визначте відстань між сусідніми максимумами поля. Побудуйте графік розподілу амплітуди поля уздовж осей x та y .

Вказівка. Скористайтесь прикладом 1.4.

Відповідь: $E(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varepsilon\right); \Delta x = \frac{\lambda}{\sin \varepsilon} = 286 \text{ мкм.}$

Задача 1.7. Плоский екран із круглим отвором діаметром 2 мм освітлюється сферичною монохроматичною хвилею, що розходить, одиничної амплітуди. Центр випромінювання хвилі розміщений на осі, перпендикулярній екрану, і проходить через центр отвору. Точкове джерело випромінювання перебуває на відстані 1 м від екрана. Знайдіть розподіл амплітуди поля в отворі екрана. Побудуйте графік цього розподілу, якщо довжина хвилі $\lambda = 0,5 \text{ мкм.}$

Вказівка. Скористайтеся прикладом 1.5.

Відповідь: $E(x, y) = E(r) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda z} r^2\right) = \cos(2\pi r^2).$

Задача 1.8. Визначте інтенсивність світла на виході інтерферометра Фабрі–Перро, коли плоска монохроматична хвиля падає під кутом ε_1 на поверхню однієї зі скляних пластинок. Внутрішня поверхня пластинки має енергетичний коефіцієнт відбиття R , а відстань між пластинками d .

Вказівка. Скористайтеся прикладом 1.6.

Відповідь: $I(\omega) = \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\omega d \cos \varepsilon_1}{c}\right)}.$

Задача 1.9. Використовуючи рівняння Гельмгольца (1.26) і рівняння для амплітуди поля (1.27) отримайте співвідношення (1.28).

Розділ 2. ОСНОВИ СКАЛЯРНОЇ ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ

2.1. Загальні положення теорії дифракції

Дифракція світла у вузькому розумінні – явище обгинання променями світла контуру непрозорих тіл і, як наслідок, проникнення світла в область геометричної тіні. У широкому розумінні дифракція – це будь-яке відхилення, яке виникає під час поширення хвиль, від законів геометричної оптики [1].

Явища дифракції відіграють важливу роль в аналізі оптичних систем і обмежують характеристики цих систем. Розв’язання дифракційних задач є найбільш складним в оптиці. Щоб отримати точний розв’язок задачі з дифракції світла, потрібно розв’язати хвильове рівняння (1.9) за відповідних граничних умов. Через математичні труднощі такі задачі розв’язані лише для двовимірних предметів дуже простої форми. Для розв’язання практичних дифракційних задач використовують наближені методи, які ґрунтуються на принципі Гюйгенса–Френеля.

Дифракційний аналіз оптичних систем дає змогу об’єднати геометричну оптику і теорію лінійних систем та розглядати оптичні системи як фільтри просторових частот. За допомогою теорії дифракції можна встановити взаємозв’язок між розподілом електромагнітного поля у площині предметів і розподілом поля в довільній площині оптичної системи.

Векторний характер електромагнітного поля враховується лише в достатньо складній векторній теорії дифракції [2].

У межах скалярної теорії дифракції не враховують взаємозв’язок векторів електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів за допомогою рівнянь Максвелла, а розглядають лише скалярну амплітуду $V(x, y, z, t)$ однієї з поперечних компонентів електромагнітного поля. Скалярна теорія дифракції дає задовільні результати, якщо виконуються дві умови:

- отвір в екрані (розмір хвильового фронту) великий порівняно з довжиною хвилі;
- дифракцію хвиль спостерігають на достатній віддалі від екрана.

Далі в цьому розділі розглядатимемо когерентне монохроматичне випромінювання.

2.2. Принцип Гюйгенса–Френеля

На практиці під час розрахунку дифракційних картин через математичні труднощі застосовують здебільшого наближені методи, в основу яких покладено *принцип Гюйгенса–Френеля*.

Згідно з принципом Гюйгенса–Френеля *кожну точку хвильового фронту можна вважати центром вторинних сферичних хвиль, а положення хвильового фронту в наступний момент часу являє собою дотичну поверхню до вторинних хвиль. Вторинні хвилі інтерферують між собою.*

Перед тим, як досліджувати дифракційні явища за допомогою принципу Гюйгенса–Френеля, перевіримо можливість застосування цього принципу до поширення світла у вакуумі між двома точками P_0P (рис. 2.1).

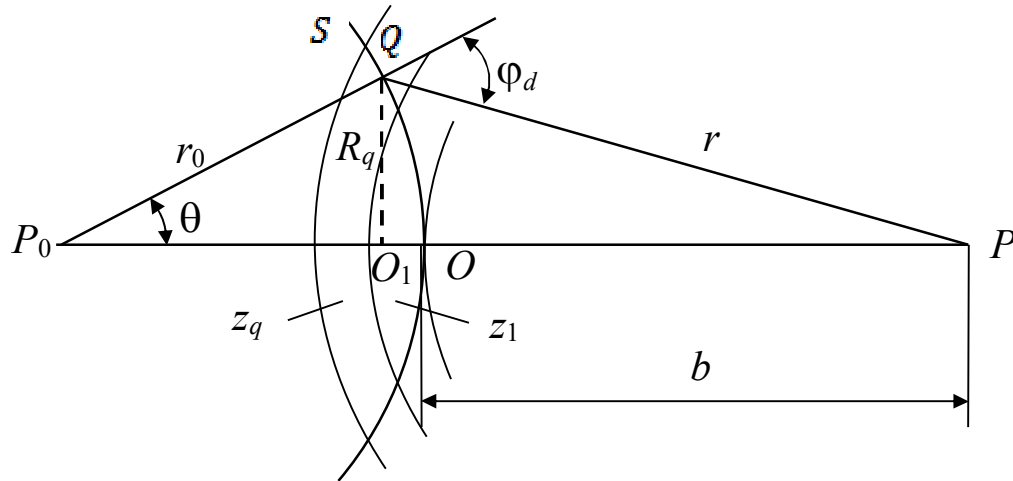


Рис. 2.1. Побудова зон Френеля

Нехай у точці P_0 розміщене точкове джерело когерентного випромінювання з довжиною хвилі λ , яке утворює у певний момент часу сферичний хвильовий фронт S із радіусом r_0 (рис. 2.1). Згідно з рівнянням (1.22) таке джерело випромінювання утворює в точці P амплітуду поля

$$V(P) = \frac{V_0}{P_0P} \exp(jk \cdot P_0P), \quad (2.1)$$

де P_0P – відстань від точки P_0 до точки P .

Визначимо амплітуду поля в точці P , користуючись принципом Гюйгенса–Френеля. Амплітуда поля в точці Q на поверхні хвильового фронту S

$$V(Q) = \frac{V_0}{r_0} \exp(jkr_0). \quad (2.2)$$

Згідно з принципом Гюйгенса точка Q є джерелом вторинної сферичної хвилі, яка створює в точці P поле з амплітудою

$$dV(P) = \frac{dV(Q)}{r} \exp(jkr) = K_F(\varphi_d) V(Q) dS \frac{\exp(jkr)}{r}, \quad (2.3)$$

де $dV(Q)$ – амплітуда вторинної сферичної хвилі в точці Q ; $K_F(\varphi_d)$ – коефіцієнт нахилу, який запропонував Френель, що враховує зменшення амплітуди вторинної хвилі залежно від напрямку поширення; φ_d – кут між нормаллю до фронту S і напрямком QP , який називають *кутом дифракції*; dS – елемент поверхні хвильового фронту навколо точки Q . Згідно з Френелем вважатимемо, що коефіцієнт K_F має максимальне значення, коли $\varphi_d = 0$, і $K_F = 0$, коли $\varphi_d = \pi/2$.

Згідно з принципом Френеля у точці P відбувається інтерференція вторинних сферичних хвиль від кожної точки хвильового фронту S . Тоді, з урахуванням виразів (2.3) і (2.2), маємо

$$V(P) = \iint_S dV(P) = \frac{V_0}{r_0} \exp(jkr_0) \iint_S \frac{\exp(jkr)}{r} K_F(\varphi_d) dS. \quad (2.4)$$

Для розрахунку інтеграла (2.4) скористаємося *зонами Френеля*. Для утворення таких зон побудуємо концентричні сфери із центром у точці P із радіусами $b, b + \lambda/2, b + \lambda, \dots, b + \lambda q/2, \dots$, де $b = OP$; O – точка перетину відрізка P_0P із хвильовою поверхнею S (рис. 2.1). Сфери ділять фронт S на ряд зон – $z_1, z_2, \dots, z_q, \dots$, які називають *зонами Френеля*.

Для розрахунку елемента хвильової поверхні dS скористаємося рис. 2.2. Будемо розглядати dS у вигляді прямокутника, який має сторони $d\xi$ та $d\eta$. Із рис. 2.1 і 2.2 маємо, що $d\xi = r_0 d\theta$, а $d\eta = R_q d\chi = r_0 \sin\theta d\chi$, де R_q – радіус q -ї зони Френеля; χ – полярний кут, який змінюється у межах від 0 до 2π . Тоді

$$dS = r_0^2 \sin\theta d\theta d\chi. \quad (2.5)$$

Із трикутника P_0QP за теоремою косинусів маємо (рис. 2.1):

$$r^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\theta. \quad (2.6)$$

Візьмемо диференціал від правої і лівої частин рівняння (2.6):

$$2rdr = 2r_0(r_0 + b)\sin\theta d\theta,$$

звідси

$$r_0 \sin\theta d\theta = \frac{rdr}{(r_0 + b)}. \quad (2.7)$$

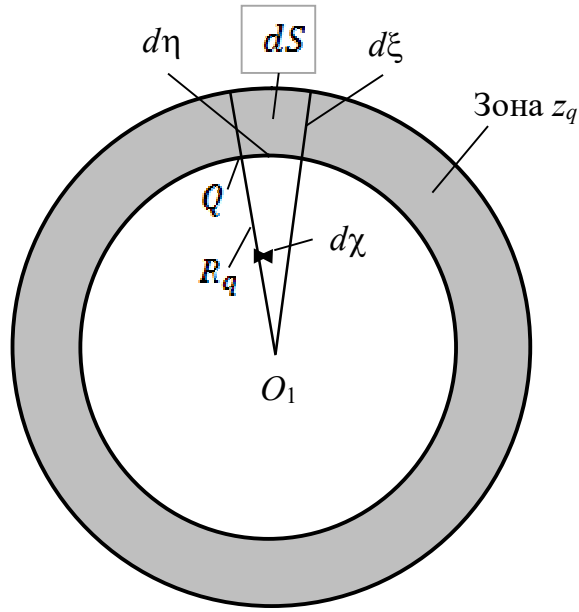


Рис. 2.2. До визначення елемента площі ds q -ї зони Френеля

Підставимо рівняння (2.7) у вираз (2.5):

$$dS = \frac{r_0}{(r_0+b)} r dr d\chi. \quad (2.8)$$

Нехай відрізки r_0 і b великі порівняно з довжиною хвилі λ , тоді можна вважати, що в будь-якій зоні Френеля z_q значення коефіцієнта K_F стає і дорівнює K_{Fq} . З урахуванням виразу (2.8) зона Френеля z_q створює в точці P амплітуду поля

$$\begin{aligned} V_q(P) &= \iint_{S_q} dV(P) = \frac{V_0}{r_0+b} \exp(jkr_0) K_{Fq} \int_0^{2\pi} \int_{b+(q-1)\lambda/2}^{b+q\lambda/2} \exp(jkr) d\chi dr = \\ &= 2\pi \frac{V_0 \exp(jkr_0)}{r_0+b} K_{Fq} \frac{1}{jk} \exp(jkr) \Big|_{b+(q-1)\lambda/2}^{b+q\lambda/2} = 2\pi \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} K_{Fq} \times \\ &\quad \times \frac{1}{jk} \exp\left(jk \frac{q\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-jk \frac{\lambda}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Оскільки $k\lambda = 2\pi$, останні три співмножники дають

$$\begin{aligned} &\frac{1}{jk} \exp\left(jk \frac{q\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-jk \frac{\lambda}{2}\right)\right] = \\ &= -\frac{j\lambda}{2\pi} \exp(j\pi q) [1 - \exp(-j\pi)] = \frac{j\lambda}{\pi} (-1)^{q+1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Після підставлення формули (2.10) у вираз (2.9) маємо

$$V_q(P) = 2j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} (-1)^{q+1} K_{Fq}. \quad (2.11)$$

Результуючу амплітуду в точці P знайдемо, підставивши вираз (2.11) в інтеграл (2.4):

$$V(P) = \sum_{q=1}^N V_q = 2j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} \sum_{q=1}^N (-1)^{q+1} K_{Fq}. \quad (2.12)$$

Аналіз формули (2.12) свідчить про те, що результуюча амплітуда в точці P – це сума амплітуд V_q , знаки яких послідовно змінюються, тобто

$$V(P) = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 \pm V_N, \quad (2.13)$$

де знак $<+>$ відповідає непарному значенню $N = 2n + 1$, а знак $<->$ – парному значенню $N = 2n$.

Для розрахунку суми (2.13) скористаємося методом Шустера. Вважатимемо, що $V_{q-1} > V_q > V_{q+1}$ і $V_{q-1} \approx V_q \approx V_{q+1}$. Для непарного значення N подамо ряд (2.13) у вигляді

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \left(\frac{1}{2}V_3 - V_4 + \frac{1}{2}V_5\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}V_{N-2} - V_{N-1} + \frac{1}{2}V_N\right) + \frac{1}{2}V_N.$$

Оскільки $V_q \approx (V_{q-1} + V_{q+1})/2$, то $V(P) = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_N$.

Аналогічно можна розрахувати амплітуду $V(P)$ для парного значення N :

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}V_{N-3} - V_{N-2} + \frac{1}{2}V_{N-1}\right) + \frac{1}{2}V_{N-1} - V_N = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_N.$$

Отже, результуючу амплітуду в точці P знаходять за співвідношенням

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 \pm \frac{1}{2}V_N. \quad (2.14)$$

Для останньої зони, яку видно з точки P , QP стає дотичною до хвильового фронту, тобто $\varphi_{dN} = \pi/2$, а $K_{FN} = 0$. У цьому випадку співвідношення (2.14) матиме вигляд

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 = j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} K_{F1}. \quad (2.15)$$

Вираз (2.15) свідчить про те, що *результуюча амплітуда в точці P , сформованій всім хвильовим фронтом, дорівнює половині амплітуди, яку формує в цій точці перша зона Френеля.*

Співвідношення (2.15) збігається з виразом (2.1) для амплітуди сферичної хвилі, коли $P_0P = r_0 + b$, а $j\lambda K_{F1} = 1$, тобто якщо

$$K_{F1} = \frac{1}{j\lambda} = \frac{\exp(-\frac{j\pi}{2})}{\lambda}. \quad (2.16)$$

Множник $\exp(-j\pi/2)$ у виразі (2.16) вказує на зміну фази вторинних хвиль відносно первинної хвилі на чверть періоду. Множник $1/\lambda$ свідчить про те, що амплітуда вторинних хвиль зменшується у $1/\lambda$ разів. Отже, можна дійти висновку, що за цих умов відносно амплітуди і фази вторинних хвиль принцип Гюйгенса–Френеля правильно описує поширення сферичних хвиль у вакуумі. Однак наведені вище додаткові припущення потрібно розглядати як зручний спосіб інтерпретації математичних виразів. Інакше кажучи, ці припущення не мають будь-якого фізичного змісту.

2.3. Зонна пластинка Френеля

Принцип Гюйгенса–Френеля і метод зон Френеля, які було розглянуто в п. 2.1, дають змогу зробити такі висновки:

1. Якщо хвильовий фронт повністю відкритий, результуюча амплітуда в точці P дорівнює половині амплітуди, яку формує у цій точці перша зона Френеля, тобто $V(P) = V_0 = V_1/2$.

2. Якщо хвильовий фронт повністю відкритий, результуюча інтенсивність у точці P $I(P) = |V_0|^2 = I_0$ дорівнює $1/4$ інтенсивності $I_1 = |V_1(P)|^2$, яку формує у цій точці перша зона Френеля, оскільки $V_0 = V_1/2$, тобто $I_0 = I_1/4$.

3. Розмістимо перпендикулярно до відрізка P_0P непрозорий екран із круглим отвором, центр якого збігається з точкою O (рис. 2.1). У цьому випадку результуюча амплітуда в точці P буде формуватися лише зонами Френеля, розміщеними в отворі. Якщо в отворі розміщується за певних умов лише перша зона Френеля, то інтенсивність у точці P буде у чотири рази більшою за інтенсивність для випадку, коли екрана немає, тобто $I_1 = 4I_0$ оскільки $V_1 = 2V_0$.

4. З наступним збільшенням розміру отвору інтенсивність у точці P буде зменшуватися, оскільки перші два члени V_1 та V_2 у виразі (2.13) мають різні знаки. Більше того, якщо в отворі розміщені лише дві зони Френеля, то результуюча амплітуда згідно з виразом (2.13) становитиме $V(P) = V_1 - V_2 \approx 0$, тобто у точці P буде майже повна темнота. Надалі зі збільшенням розмірів отвору спостерігається періодична зміна інтенсивності у точці P . Такий самий результат можна отримати і тоді, коли розміри отвору і положення джерела випромінювання залишаються незмінними, а точка спостереження P переміщується до екрана.

5. Якщо в точці O розмістити непрозорий екран, який затуляє лише першу зону Френеля, то результуюча амплітуда згідно з виразом (2.13) становитиме

$$V(P) = -V_2 + V_3 - V_4 + \dots = -\frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \dots = -\frac{1}{2}V_1. \quad (2.17)$$

Вираз (2.17) означає, що в центрі геометричної тіні диска інтенсивність світла $I(P) = |V_1/2|^2 = I_0$, яку називають *прямою Пуассона*, буде такою самою, як у випадку, коли диска немає.

6. Якщо затулити всі парні (або непарні) зони Френеля, то результуюча амплітуда

$$V(P) = V_1 + V_3 + V_5 + \dots \quad (2.18)$$

Це означає, що інтенсивність у точці суттєво збільшується порівняно з тією, яка була без екрана. Тобто такий екран, який називають *зонною пластинкою Френеля*, веде себе подібно лінзі, що фокусує світло.

7. Якщо змінити фази всіх парних (або непарних) зон на протилежні, то

$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \dots \quad (2.19)$$

При цьому інтенсивність у точці P (фокусі пластинки Френеля) ще збільшиться.

Співвідношення (2.18) і (2.19) використовують під час проектування зонних пластинок Френеля.

Розрахуємо радіус q -ї зони Френеля, використовуючи рис. 2.1. Із трикутників P_0QO_1 і PQO_1 маємо:

$$QO_1^2 = R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - \Delta_q)^2 = r^2 - (b + \Delta_q)^2, \quad (2.20)$$

де $\Delta_q = O_1O$; $r = b + \lambda q/2$.

Звідси

$$2r_0\Delta_q = r^2 - b^2 - 2b\Delta_q \approx b\lambda q - 2b\Delta_q \rightarrow \Delta_q = \frac{b\lambda q}{2(r_0+b)}.$$

Підставимо значення Δ_q у формулу (2.20):

$$R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - \Delta_q)^2 \approx 2r_0\Delta_q = \frac{r_0 b \lambda q}{r_0 + b}.$$

Звідси

$$R_q = \sqrt{\frac{r_0 b}{r_0 + b}} \lambda q. \quad (2.21)$$

Визначимо розміри R_q і кількість q зон Френеля, які розміщуються в отворі екрана діаметром D . Нехай екран перебуває на відстані a та a' від

джерела світла P_0 і точки спостереження P відповідно (рис. 2.3). Із точок P_0 і P як із центрів опишемо сфери, які проходять через краї отвору AB . Із трикутника P_0AO маємо

$$AO^2 = \frac{D^2}{4} = P_0A^2 - P_0O^2 = (a + OF)^2 - a^2 \approx 2aOF.$$

Аналогічно із трикутника PAO маємо

$$\frac{D^2}{4} \approx 2a'EO,$$

звідси

$$EF = EO + OF = \frac{D^2}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right).$$

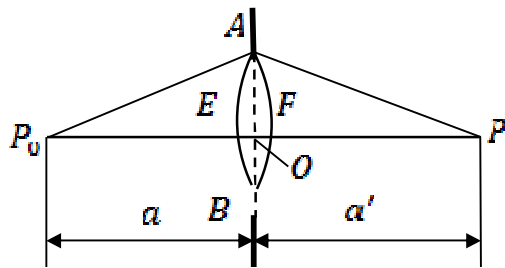


Рис. 2.3. Визначення кількості зон Френеля

Кількість зон q знайдемо діленням відрізка EF на $\lambda/2$:

$$q = \frac{D^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right). \quad (2.22)$$

Із формули (2.22) маємо

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{4q\lambda}{D^2} = \frac{1}{f_q}. \quad (2.23)$$

Вираз (2.23) – це формула лінзи, де f_q – фокусна відстань зонної пластинки Френеля,

$$f_q = \frac{D^2}{4q\lambda}. \quad (2.24)$$

Якщо q – ціле число, то D буде діаметром, а $R_q = D/2$ – радіусом q -ї зони Френеля, точніше її зовнішнього краю. Із виразу (2.23) маємо

$$R_q = \sqrt{\frac{aa'}{a+a'}} q\lambda. \quad (2.25)$$

Отримані вирази 2.21 і 2.25 співвідносяться лише між собою.

Наприклад, якщо $a = a' = 1$ м, $\lambda = 0,6$ мкм, то $R_1 = 0,55$ мм, $R_2 = 0,77$ мм, $R_3 = 0,955$ мм.

2.4. Теорія дифракції Кірхгофа

2.4.1. Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа

Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа виражає розв'язок однорідного диференціального рівняння Гельмгольца (1.26) у довільній точці P_0 через значення цього розв'язку та його першої похідної на довільній замкнутій поверхні S , з точкою P_0 всередині (рис. 2.4).

Розглянемо строго монохроматичне випромінювання у точці $P(\vec{r})$, яке задовольняє рівняння Гельмгольца (1.26):

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0. \quad (2.26)$$

Для розв'язання цього рівняння використаємо *теорему Гріна*: нехай V і G – дві довільні комплексні функції координат, а S – замкнена поверхня, яка обмежує об'єм v . Якщо функції V та G та їх перші й другі похідні однозначні і неперервні всередині об'єму v і на поверхні S , то справджується співвідношення

$$\iiint_v (G\Delta V - V\Delta G)dv = \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (2.27)$$

де $\partial/\partial n$ – часткова похідна на поверхні S , яка береться у напрямку зовнішньої нормалі \vec{n} до цієї поверхні. Допоміжну функцію $G(P)$ називають *функцією Гріна*.

Як функцію Гріна оберемо функцію, яка описує сферичну хвилю одиничної амплітуди, що поширюється з точки P_0 . Згідно з рівнянням (1.22) така функція має вигляд

$$G(\vec{r}) = \frac{\exp(jkr)}{r}, \quad (2.28)$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{P_0 P}$ – вектор, направлений з точки P_0 у довільну точку P , розміщену на поверхні S .

Щоб можна було застосувати теорему Гріна (2.27), слід вилучити точку P_0 , в якій функція $G(\vec{r} = 0)$ має розрив. Для цього побудуємо сферу з центром у точці P_0 , яка має радіус ε і площу S_ε . Застосуємо тепер теорему Гріна до об'єму v' , обмеженого поверхнями S і S_ε . Зовнішня нормаль \vec{n} напрямлена всередину на поверхні S_ε (рис. 2.4).

Функція Гріна (2.28) описує амплітуду монохроматичної хвилі і тому задовольняє рівняння Гельмгольца (2.1), тобто

$$\Delta G(\vec{r}) + k^2 G(\vec{r}) = 0. \quad (2.29)$$

Помножимо вираз (2.26) на V , а вираз (2.29) на G і віднімемо вираз (2.29) від виразу (2.26):

$$G\Delta V + k^2 GV - V\Delta G - k^2 VG = 0. \quad (2.30)$$

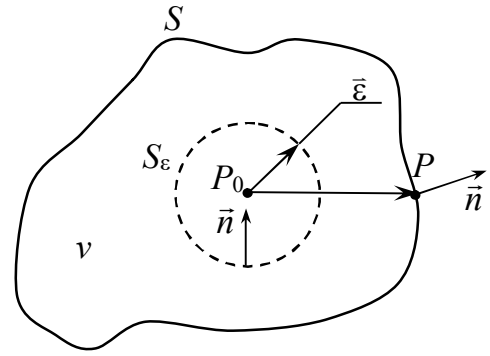


Рис. 2.14. Виведення інтегральної теореми Гельмгольца–Кірхгофа

Підставимо рівняння (2.30) в теорему (2.27):

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{S+S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \\ &= \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \end{aligned} \quad (2.31)$$

де

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\exp(jkr)}{r} \left(jk - \frac{1}{r} \right) \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}), \quad (2.32)$$

де $(\vec{r} \wedge \vec{n})$ – кут між вектором \vec{r} і зовнішньою нормаллю \vec{n} ; $\vec{r} = \overrightarrow{P_0 P}$.

Розглянемо інтегрална поверхні S_ε :

$$I = \iint_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (2.33)$$

для якого функція Гріна (2.28) та її похідна (2.32) мають вигляд

$$G(\varepsilon) = \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon}; \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(jk - \frac{1}{\varepsilon} \right) (-1). \quad (2.35)$$

Перейдемо у виразі (2.33) від інтегрування по сферичній поверхні S_ε до інтегрування по тілесному куту $d\Omega = dS/\varepsilon^2$.

З урахуванням функцій (2.34) і (2.35) інтеграл (2.33) матиме вигляд

$$I = \iint_{4\pi} \left[\frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) \right] \varepsilon^2 d\Omega. \quad (2.36)$$

Якщо радіус ε наближається до нуля, то через неперервність функції V у точці P_0 інтеграл (2.36) набуває вигляду

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{4\pi} \left[\frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) \right] \varepsilon^2 d\Omega = -V(P_0)4\pi. \quad (2.37)$$

Із співвідношень (2.31) і (2.37) маємо

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (2.38)$$

Теорема Гельмгольца–Кірхгофа (2.38) відіграє важливу роль у скалярній теорії дифракції, оскільки дає змогу виразити поле в точці P_0 через значення цього поля на замкненій поверхні S , яка оточує цю точку.

2.4.2. Дифракція на плоскому екрані

Розглянемо найбільш важливий для практики випадок, коли дифракція світла відбувається на отворі в нескінченному

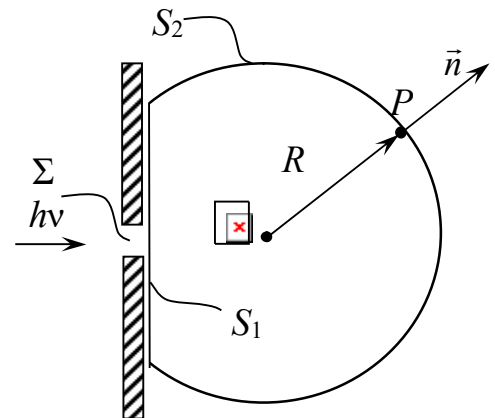


Рис. 2.5. До виведення формули (2.44)

непрозору плоскому екрані. Щоб знайти поле в будь-якій точці P_0 за екраном, скористаємося теоремою Гельмгольца–Кірхгофа (2.38). Замкнену поверхню S подамо у вигляді плоскої поверхні S_1 і сферичної поверхні S_2 , як зображено на рис. 2.5,

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (2.39)$$

Розглянемо спочатку інтеграл (2.39) на сферичній поверхні S_2 радіусом R із центром у точці P_0 . Для цієї поверхні функція Гріна (2.28) та її похідна (2.32) мають вигляд

$$G(R) = \frac{\exp(jkR)}{R}; \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \approx \frac{\exp(jkR)}{R} (jk). \quad (2.41)$$

У формулі (2.41) зроблено наближення, що для великих значень R виконується умова $\frac{1}{R} \ll k = 2\pi/\lambda$.

Підставивши функції (2.40) і (2.41) у вираз (2.39), маємо:

$$\iint_{S_2} \left[\frac{\exp(jkR)}{R} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jkR)}{R} jk \right] dS = \iint_{\Omega} \frac{\exp(jkR)}{R} \left[\frac{\partial V}{\partial n} - Vjk \right] R^2 d\Omega, \quad (2.42)$$

де Ω – тілесний кут з вершиною у точці P_0 , утворений сферичною поверхнею S_2 .

Розглянемо інтеграл (2.42), коли $R \rightarrow \infty$. Цей інтеграл буде дорівнювати нулю, якщо виконується умова Зоммерфельда:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial V}{\partial n} - Vjk \right] R = 0. \quad (2.43)$$

Фізично умова (2.43) виконується. Справді, якщо світло з'явилося в момент часу t_0 , то за час $t - t_0$ воно поширилося на відстань $c(t - t_0)$, де c – швидкість світла. Тому, якщо обрати радіус сфери $S_2 R \gg c(t - t_0)$, то $V(P) = 0$ і $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$.

Отже, якщо виконується умова Зоммерфельда (2.43), амплітуду світла у точці P_0 визначають за виразом

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (2.44)$$

Для обчислення інтеграла (2.44) оберемо нову функцію Гріна, яка описує поле, утворене двома точковими джерелами одиничної амплітуди, розміщеними в точках P_0 і P'_0 симетрично відносно екрана (рис. 2.6). Джерела

світла випромінюють із різницею фаз π . У цьому разі функція Гріна та її похідна матимуть вигляд

$$G(P) = \frac{\exp(jkr)}{r} - \frac{\exp(jkr')}{r'}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\exp(jkr)}{r} jk \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) - \frac{\exp(jkr')}{r'} jk \cos(\vec{r}' \wedge \vec{n}), \quad (2.46)$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні S_1 ; $\vec{r}' = \overrightarrow{P_0 P}$ (рис. 2.6).

У виразі (2.46) зроблено припущення, що $k \gg 1/r$.

На поверхні S_1 для симетричних точок P_0 і P'_0 маємо $r' = r$ і $\cos(\vec{r}' \wedge \vec{n}) = -\cos(\vec{r} \wedge \vec{n})$. Тому на поверхні S_1 співвідношення (2.45) і (2.46) мають вигляд

$$G(P) = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial n} = 2 \frac{\exp(jkr)}{r} jk \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}). \quad (2.47)$$

Підставимо співвідношення (2.47) в інтеграл (2.44):

$$V(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{S_1} V(P) \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) dS. \quad (2.48)$$

Для спрощення виразу (2.48) скористаємося граничними умовами Кірхгофа, згідно з якими:

1. У межах отвору Σ в екрані розподіл поля $V(P)$ має таке саме значення, як і у випадку, коли екрана не було.
2. За межами отвору Σ поле на поверхні S_1 дорівнює нулю, тобто $V(P) = 0$.

За таких умов інтегрування за поверхнею S_1 у виразі (2.48) можна замінити інтегруванням за площею отвору Σ . При цьому вираз (2.48) набуде вигляду

$$V(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} V(P) \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) dS. \quad (2.49)$$

Вираз (2.49) називають *формулою дифракції Релея–Зоммерфельда* на плоскому екрані. Згідно з цією формулою амплітуду поля $V(P_0)$ у точці P_0 можна визначити за допомогою інтеграла суперпозиції, якщо відомий розподіл поля $V(P)$ у площині отвору Σ . Формула (2.49) справедлива, якщо $r \gg \lambda/2\pi$.

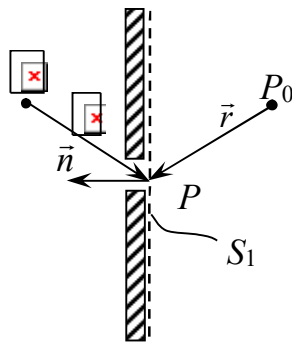


Рис. 2.6. До вибору функції Гріна у разі дифракції на плоскому екрані

2.5. Дифракція Френеля

Вираз (2.49) є найбільш загальною формулою у скалярній теорії дифракції. На практиці найчастіше площина екрана xu з отвором Σ паралельна площині спостереження x_0y_0 (рис. 2.7).

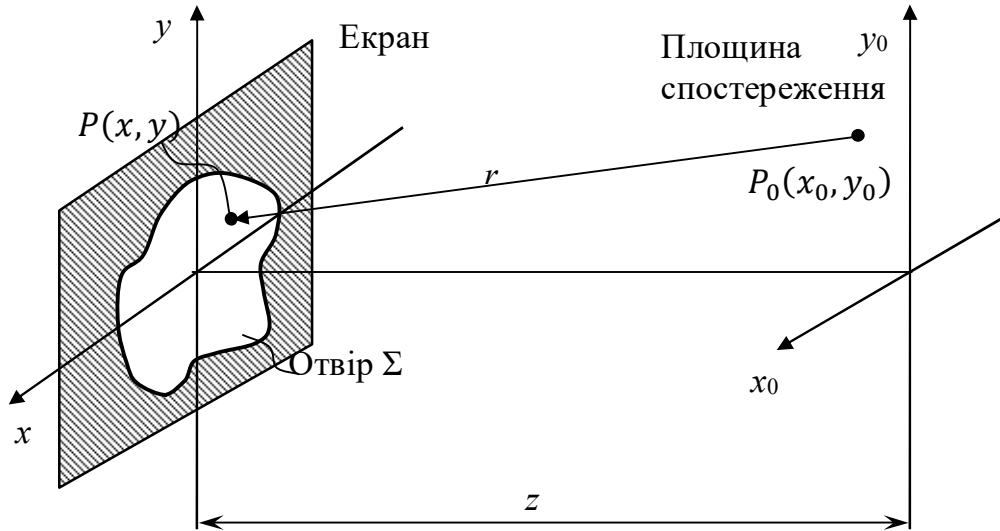


Рис. 2.7. Схема дифракції Френеля

Згідно з граничними умовами Кірхгофа амплітуда поля $V(P) = V(x, y)$ визначена всередині отвору Σ , а за його межами дорівнює нулю, що дає змогу розглядати інтеграл (2.49) у нескінченних межах, тобто

$$V(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) h(x, y; x_0, y_0) dx dy, \quad (2.50)$$

де $h(x, y; x_0, y_0)$ — вагова функція дифракції Релея–Зоммерфельда,

$$h(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda} \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}); \quad (2.51)$$

$$r = P_0P = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2}}. \quad (2.52)$$

Щоб спростити обчислення інтеграла (2.50), Френель запропонував такі наближення:

1. Розмір отвору в екрані набагато менший за відстань z між площинами xu та x_0y_0 .
2. Дифракція спостерігається біля центра системи координат x_0y_0 , розміри якої набагато менші за відстань z .

За таких наближень можна вважати, що $r = P_0P \approx z$, а $\cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) \approx 1$. Слід також зазначити, що в показнику експоненти у виразі (2.51) не можна

замінити r на z , оскільки при цьому виникає значна фазова похибка. Наприклад, якщо $r = z + \Delta z$, то $kr = kz + k\Delta z$. За $\Delta z = 1$ мм і $\lambda = 0,5$ мкм, тоді $k\Delta z = 400 \pi$ рад.

Цю похибку можна зменшити, якщо подати вираз (2.52) у вигляді степеневого ряду та обмежитися двома членами ряду. Скористаємось розкладом функції $\sqrt{1+t}$ у ряд з довідника [3]:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + \dots, \quad (2.53)$$

тоді

$$r \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]. \quad (2.54)$$

Наближення Френеля (2.54) виконується, якщо $\frac{1}{8}t^2 \ll 1$ або

$$kz \frac{1}{8} \left[\frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]^2 \ll 1 \text{ радіан},$$

звідси

$$z \gg \left\{ \frac{\pi}{4\lambda} \left[\frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]^2 \right\}^{1/3}. \quad (2.55)$$

Простір за екраном, який задовольняє умову (2.55), називають *областю дифракції Френеля*. Наприклад, якщо $\lambda = 0,5$ мкм, а максимальні розміри отвору в екрані та області спостереження становлять 1 см, то $z \gg 40$ см.

Підставимо наближення (2.54) у вираз (2.51), тоді інтеграл (2.50) матиме вигляд

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \frac{1}{j\lambda z} \exp \left\{ jkz \left[1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{2z^2} \right] \right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkz) \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Вираз (2.56) називають *рівнянням дифракції Френеля*. Множник $\exp(jkz)$ визначає постійний фазовий зсув, який не впливає на розподіл поля $V_0(x_0, y_0) = V(x_0, y_0)$. Тому надалі його не враховуватимемо.

Співвідношення (2.56) являє собою інтеграл згортки, який можна подати у вигляді

$$V_0(x_0, y_0) = V(x_0, y_0) * h_F(x_0, y_0), \quad (2.57)$$

де $h_F(x_0, y_0)$ – імпульсний відгук дифракції Френеля,

$$h_F(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_0^2 + y_0^2) \right]. \quad (2.58)$$

Застосуємо теорему згортки до інтеграла (2.57). Тоді просторовий спектр розподілу амплітуди поля у площині спостереження

$$\tilde{V}_0(v_x, v_y) = F\{V_0(x_0, y_0)\} = \tilde{V}(v_x, v_y)H_F(v_x, v_y), \quad (2.59)$$

де $\tilde{V}_0(v_x, v_y)$ – просторовий спектр розподілу амплітуди поля в отворі екрана, $\tilde{V}(v_x, v_y) = F\{V(x_0, y_0)\}$; $F\{\}$ – оператор двовимірного перетворення Фур'є (1.32); $H_F(v_x, v_y)$ – передавальна функція дифракції Френеля,

$$H_F(v_x, v_y) = F\{h_F(x_0, y_0)\} = \exp[-j\pi\lambda z(v_x^2 + v_y^2)]; \quad (2.60)$$

v_x, v_y – просторові частоти,

$$v_x = \frac{x_0}{\lambda z}; \quad v_y = \frac{y_0}{\lambda z}. \quad (2.61)$$

2.6. Дифракція Фраунгофера

Подано рівняння дифракції Френеля (2.56) у вигляді

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right] dx dy. \quad (2.62)$$

Щоб спростити обчислення інтеграла (2.62) збільшуватимемо відстань z між екраном і площиною спостереження доти, поки не буде виконуватися умова

$$\exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \rightarrow 1, \text{ або } \frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2) \ll 1. \quad (2.63)$$

Із нерівності (2.63) маємо

$$z \gg \frac{\pi}{\lambda}(x^2 + y^2). \quad (2.64)$$

Частину простору за екраном, для якого виконується умова (2.64), називають *областю дифракції Фраунгофера*. Для визначених у п. 2.3 параметрів $z \gg 160$ м.

З урахуванням наближення Фраунгофера (2.64) амплітуда поля у точці P_0

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right] dx dy. \quad (2.65)$$

Вираз (2.65) називають *рівнянням дифракції Фраунгофера*. Цей вираз являє собою з точністю до множника $1/j\lambda z$ двовимірне перетворення Фур'є від розподілу поля $V(x, y)$ у площині отвору для просторових частот (2.61).

2.7. Приклади розрахунку дифракції Фраунгофера

2.7.1. Прямокутний отвір

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на отворі прямокутної форми розміром $a \times b$ (рис. 2.8). Амплітудний коефіцієнт пропускання такого отвору

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2} \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.66)$$

Нехай на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2} \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.67)$$

Щоб знайти амплітуду поля у площині спостереження, підставимо функцію (2.67) у рівняння (2.65):

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0 x \right) dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} y_0 y \right) dy = \frac{1}{j\lambda z} I(x_0) I(y_0). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Обчислимо інтеграли у виразі (2.68):

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \frac{1}{-j \frac{2\pi}{\lambda z}} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0 x \right) \Big|_{-a/2}^{a/2} = \\ &= \frac{1}{-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0} \left[\exp \left(-j \frac{\pi}{\lambda z} x_0 a \right) - \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} x_0 a \right) \right] = a \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0 \right)}{\frac{\pi a}{\lambda z} x_0}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Аналогічно

$$I(y_0) = b \frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0 \right)}{\frac{\pi b}{\lambda z} y_0}. \quad (2.70)$$

Тоді, з урахуванням функцій (2.69) і (2.70), маємо:

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0 \right)}{\frac{\pi a}{\lambda z} x_0} \frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0 \right)}{\frac{\pi b}{\lambda z} y_0} = \frac{ab}{j\lambda z} \operatorname{sinc} \left(\frac{a}{\lambda z} x_0 \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{b}{\lambda z} y_0 \right), \quad (2.71)$$

де $\sin(\pi x) / \pi x$ – sinc-функція.

Приймачі оптичного випромінювання реєструють не амплітуду поля $V(x_0, y_0)$, а його інтенсивність: $I(x_0, y_0) = |V|^2 = V \cdot V^*$. Тоді

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{ab}{\lambda z} \right)^2 \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{a}{\lambda z} x_0 \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{b}{\lambda z} y_0 \right) \right]^2. \quad (2.72)$$

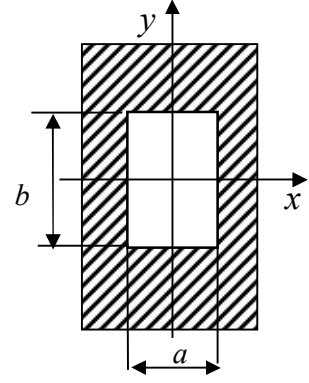


Рис. 2.8. Екран із прямокутним отвором

Визначимо інтенсивність у центрі дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$, використовуючи границю $\sin x/x = 1$, коли $x \rightarrow 0$. Із виразу (2.72) маємо $I(0,0) = (ab/\lambda z)^2$.

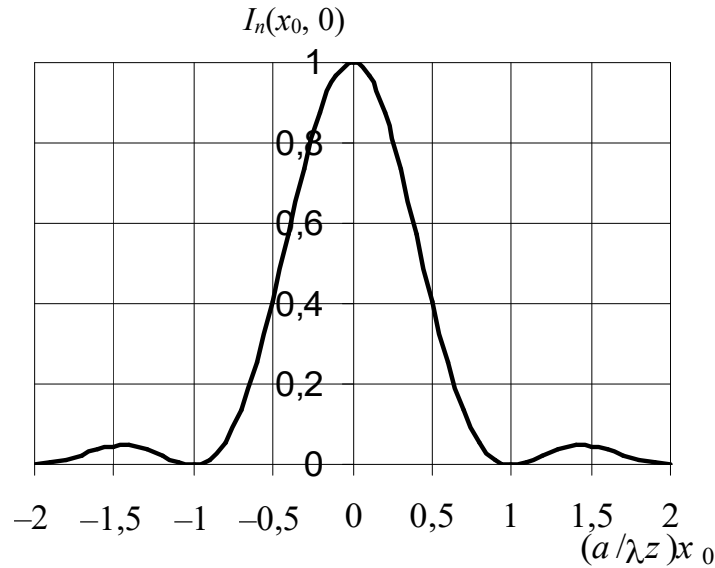


Рис. 2.9. Одновимірний розподіл інтенсивності світла під час дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі

Одновимірний розподіл нормованої інтенсивності $I_n(x_0, 0) = I(x_0, 0)/I(0,0)$ подано на рис. 2.9. З аналізу функції (2.72) видно, що інтенсивність поля дорівнює нулю в точках з координатами

$$\left(\frac{m\lambda z}{a}, y_0\right) \text{ та } \left(x_0, \frac{n\lambda z}{b}\right), \quad (2.73)$$

де m, n – цілі числа.

Розподіл поля під час дифракції на плоскому екрані можна розглядати як функцію кута дифракції (рис. 2.10):

$$\sin \varphi_d = \frac{x_0}{r} \approx \varphi_d \approx \frac{x_0}{z}. \quad (2.74)$$

Визначимо, наприклад, кутове положення першого дифракційного мінімуму. Із рис. 2.10, функції (2.72) і виразу (2.73) знаходимо, що

$$\varphi_{d1,min} = \frac{\lambda}{a}. \quad (2.75)$$

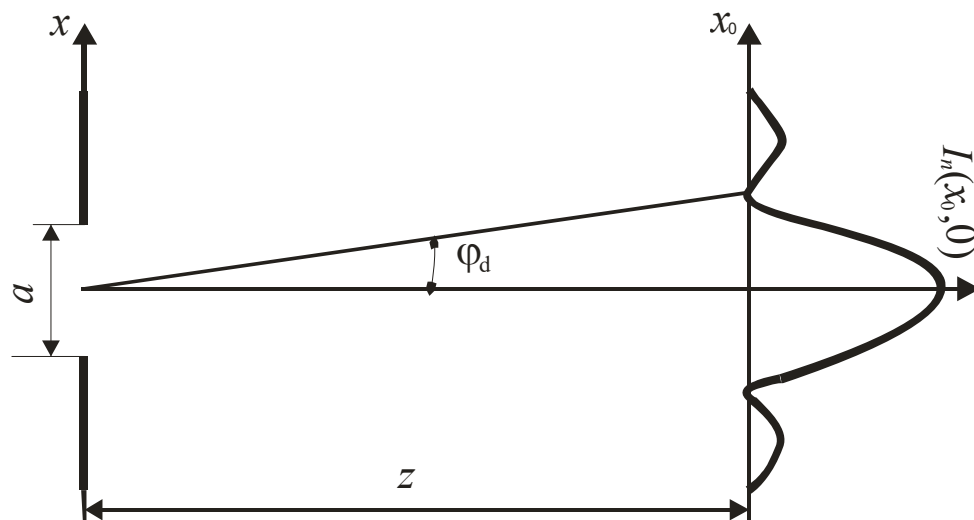


Рис. 2.10. Розподіл інтенсивності світла вздовж осі x_0 під час дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі

2.7.2. Круглий отвір

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на круглому отворі, який має радіус R (рис. 2.11). Амплітудний коефіцієнт пропускання такого отвору

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.76)$$

Нехай на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді для функцій (2.76) амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.77)$$

Оскільки вираз (2.77) є вісесиметричною функцією, запишемо його і рівняння дифракції Фраунгофера (2.65) у полярній системі координат, використовуючи перетворення Фур'є–Бесселя:

$$F\{V(x, y)\} = B\{V(r)\} = 2\pi \int_0^\infty V(r) J_0(2\pi \rho r) r dr, \quad (2.78)$$

де $B\{\}$ – оператор перетворення Фур'є–Бесселя; r – радіус точки $P(x, y)$ у полярній системі координат (рис. 2.11), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; ρ – радіус просторової частоти в полярній системі координат, $\rho = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, з урахуванням виразу

(2.61)

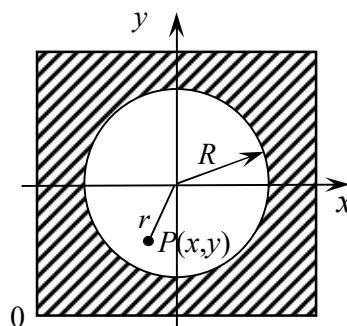


Рис. 2.11. Екран із круглим отвором

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{x_0}{\lambda z}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{\lambda z}\right)^2} = \frac{1}{\lambda z} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{r_0}{\lambda z}. \quad (2.79)$$

Тоді рівняння дифракції Фраунгофера (2.65) у полярній системі координат з урахуванням виразів (2.78) і (2.79) матиме вигляд

$$V(x_0, y_0) = V(r_0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^\infty V(r) J_0\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r\right) r dr, \quad (2.80)$$

де $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$;

$$V(x, y) = V(r) = \begin{cases} 1, & \text{коли } 0 \leq r \leq R; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.81)$$

Підставимо функцію (2.81) у рівняння (2.80):

$$V(r_0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^R 1 \cdot J_0\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r\right) r dr. \quad (2.82)$$

Для обчислення виразу (2.82) скористаємося табличним інтегралом із довідника [3]:

$$\int_0^z x J_0(x) dx = z J_1(z), \quad (2.83)$$

де J_0 і J_1 – функції Бесселя нульового і першого порядку.

Замінімо змінні:

$$2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r = x, \quad r = \frac{\lambda z}{2\pi r_0} x, \quad dr = \frac{\lambda z}{2\pi r_0} dx. \quad (2.84)$$

Тоді інтеграл (2.82), з урахуванням (2.83) і (2.84), набуде вигляду

$$\begin{aligned} V(r_0) &= \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^{2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R} J_0(x) \frac{\lambda z}{2\pi r_0} x \frac{\lambda z}{2\pi r_0} dx = \frac{2\pi}{j\lambda z} \left(\frac{\lambda z}{2\pi r_0}\right)^2 2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R J_1\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R\right) = \\ &= \frac{2\pi}{j} \frac{R}{2\pi r_0} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R\right)}{2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R}\right] \frac{2\pi R}{2\lambda z} r_0 = \frac{\pi R^2}{j\lambda z} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R\right)}{2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R}\right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Розподіл інтенсивності під час дифракції на круглому отворі можна описати виразом

$$I(r_0) = |V(r_0)|^2 = \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z}\right)^2 \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0\right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0}\right]^2, \quad (2.86)$$

де $V(r_0)$ – функція (2.85).

Розподіл інтенсивності (2.86) називають *картиною Ейрі*. Інтенсивність у центрі картини Ейрі знайдемо з виразу (2.86), використовуючи границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2J_1(x)}{x} = 1. \quad (2.87)$$

Тоді, з урахуванням (2.87),

$$I(r_0 = 0) = \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z}\right)^2. \quad (2.88)$$

Нормований розподіл інтенсивності (2.86) з урахуванням інтенсивності (2.88) визначимо як

$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \left[2 \frac{J_1\left(2\pi\frac{R}{\lambda z}r_0\right)}{2\pi\frac{R}{\lambda z}r_0} \right]^2. \quad (2.89)$$

Дифракційна картина Ейрі являє собою яскравий *кружок Ейрі*, навколо якого розміщені світлі кільця невеликої інтенсивності. Положення мінімумів можна знайти із розв'язку рівняння $J_1(2\pi Rr_0/\lambda z) = 0$, а положення максимумів – із рівняння

$$\frac{d}{dx} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi\frac{R}{\lambda z}r_0\right)}{2\pi\frac{R}{\lambda z}r_0} \right] = 0. \quad (2.90)$$

Щоб розв'язати рівняння (2.90), скористаємося співвідношенням 9.1.30 з довідника [3], яке можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dx} [x^{-n}] J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (2.91)$$

Тоді рівняння (2.90) набуває вигляду $J_2(2\pi Rr_0/\lambda z) = 0$.

Значення нормованої інтенсивності у послідовних максимумах і мінімумах картини Ейрі наведено у табл. 2.1, а графік функції (2.89) зображено на рис. 2.12.

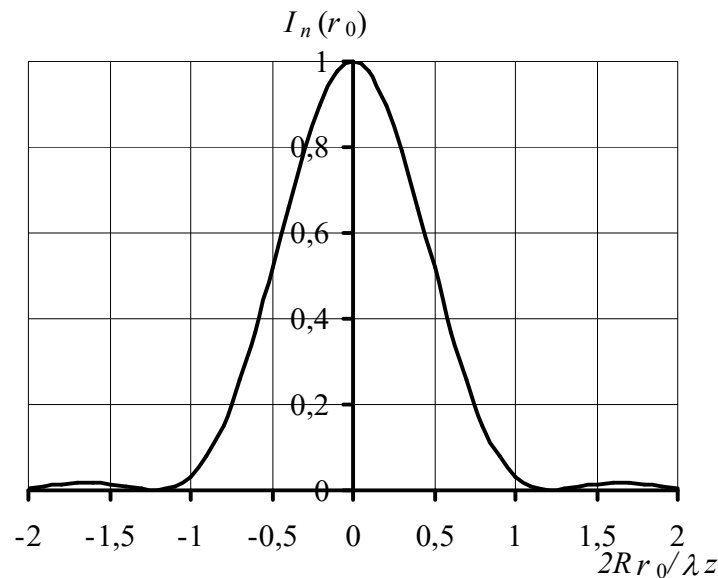


Рис. 2.12. Одновимірний розподіл інтенсивності світла за дифракції Фраунгофера на круглому отворі

Таблиця 2.1

**Екстремальні значення нормованої інтенсивності
у дифракційній картині Ейрі**

$2Rr_0/\lambda z$	0	1,22	1,64	2,33	2,68	3,24
$\left[2 \frac{J_1(2\pi Rr_0/\lambda z)}{2\pi Rr_0/\lambda z}\right]^2$	1	0	0,018	0	0,004	0

Визначимо радіус кружка Ейрі, використовуючи дані табл. 2.1:

$$r_E = r_{0,min,1} = 1,22 \frac{\lambda z}{2R}. \quad (2.92)$$

Кутовий розмір кружка Ейрі

$$\varphi_E = \frac{r_E}{z} = 1,22 \frac{\lambda}{2R}. \quad (2.93)$$

Радіус кружка Ейрі (2.92) або (2.93) визначає дифракційну межу просторового розділення оптичної системи, яка формує зображення.

Визначимо частку світлової енергії, що міститься в центрі дифракційної картини Ейрі, обмеженої колом із радіусом R_0 :

$$L(R_0) = \frac{\Phi(R_0)}{\Phi(\infty)} = \frac{2\pi \int_0^{R_0} I(r_0) r_0 dr_0}{\pi R^2}, \quad (2.94)$$

де $\Phi(R_0)$ – потік світла, що перебуває в межах кола з радіусом R_0 ; $\Phi(\infty) = I_0 S_\Sigma = \pi R^2$ – повний потік світла, що проходить через круглий отвір площею S_Σ і формує всю дифракційну картину Ейрі.

Підставимо вираз (2.86) у рівняння (2.94):

$$L(R_0) = \frac{2\pi}{\pi R^2} \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z}\right)^2 \int_0^{R_0} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0\right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0}\right]^2 r_0 dr_0. \quad (2.95)$$

Обчисливши інтеграл у виразі (2.95), отримаємо такий результат (див. приклад 2.4 на с. 61):

$$L(R_0) = 1 - J_0^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right) - J_1^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right). \quad (2.96)$$

Співвідношення (2.96) називають *формулою Релея*. Для темних кілець $J_1 = 0$, і тому частина повного потоку за межами темного кільця дорівнює J_0^2 . Для кружка Ейрі

$$L(R_0) = 1 - J_0^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} 1,22 \frac{\lambda z}{2R}\right) = 1 - J_0^2(1,22\pi) = 0,838.$$

Це означає, що в межах кружка Ейрі зосереджено 83,8 % усієї енергії.

2.7.3. Синусоїдальна дифракційна ґратка

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на синусоїдальній дифракційній ґратці, амплітудний коефіцієнт пропускання якої описують функцією (рис. 2.13)

$$t(x, y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right), \quad (2.97)$$

де ν_0 – просторова частота ґратки;
 $a \times b$ – розмір ґратки; m – глибина модуляції; $\text{rect}(x)$ – прямокутна rect -функція,

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } |x| \leq 1/2; \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (2.98)$$

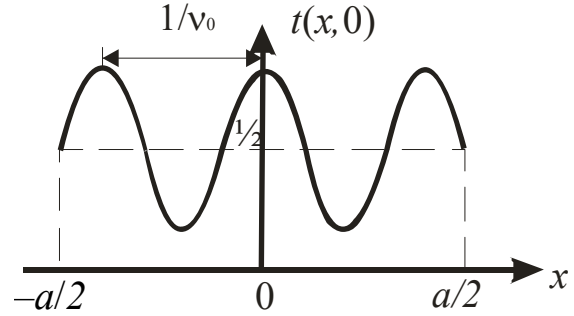


Рис. 2.13. Амплітудний коефіцієнт пропускання синусоїдальної дифракційної ґратки

Нехай на таку ґратку нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді амплітуда поля безпосередньо за ґраткою

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right). \quad (2.99)$$

Підставимо вираз (2.99) у рівняння дифракції Фраунгофера (2.65) і подамо його у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} F \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

де $F\{ \}$ – оператор двовимірного перетворення Фур'є для просторових частот (2.61).

Застосуємо теорему згортки до рівняння (2.100):

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} F \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x) \right] \right\} * F \left\{ \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \right\}. \quad (2.101)$$

Визначимо перетворення Фур'є окремих компонентів у рівнянні (2.101):

$$\begin{aligned} F_1 &= F \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x) \right] \right\} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \frac{1}{2} (e^{j2\pi\nu_0 x} + e^{-j2\pi\nu_0 x}) \right] \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\nu_y y} dy \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\nu_x x} dx + \frac{m}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(\nu_x - \nu_0)x} dx + \frac{m}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(\nu_x + \nu_0)x} dx \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Скористаємося інтегральним поданням дельта-функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi z_0 z} dz = \delta(z_0). \quad (2.103)$$

Тоді вираз (2.102) з урахуванням інтеграла (2.103) матиме вигляд

$$F_1 = \delta(v_y) \left[\frac{1}{2} \delta(v_x) + \frac{m}{4} \delta(v_x - v_0) + \frac{m}{4} \delta(v_x + v_0) \right]. \quad (2.104)$$

Крім того,

$$F_2 = F \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{b} \right) \right\} = ab \text{sinc}(av_x) \text{sinc}(bv_y). \quad (2.105)$$

Підставимо вирази (2.104) і (2.105) у рівняння (2.101):

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \{F_1 * F_2\} = \frac{1}{j\lambda z} \times \\ \times \left\{ \delta(v_y) \left[\frac{1}{2} \delta(v_x) + \frac{m}{4} \delta(v_x - v_0) + \frac{m}{4} \delta(v_x + v_0) \right] * ab \text{sinc}(av_x) \text{sinc}(bv_y) \right\}. \quad (2.106)$$

Скористаємося фільтрувальною властивістю дельта-функції:

$$f(z) * \delta(z - z_0) = f(z - z_0). \quad (2.107)$$

Тоді рівняння (2.106) з урахуванням (2.107) матиме вигляд

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \text{sinc}(bv_y) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \text{sinc}(av_x) + \frac{m}{4} \text{sinc}[a(v_x - v_0)] + \frac{m}{4} \text{sinc}[a(v_x + v_0)] \right\}. \quad (2.108)$$

Отримана функція (2.108) описує розподіл амплітуди поля для дифракції Фраунгофера на амплітудній синусоїдальній дифракційній ґратці (2.97). За достатньо великої просторової частоти v_0 дифракційної ґратки sinc -функції у виразі (2.108) зміщені одна відносно одної і не перекриваються, тому амплітуда поля у центрі дифракційної картини $V(0,0) = ab/j2\lambda z$.

Нормований розподіл інтенсивності в дифракційній картині визначають так:

$$I_n(x_0, y_0) = \left| \frac{V(x_0, y_0)}{V(0,0)} \right|^2 = \text{sinc}^2 \left(b \frac{y_0}{\lambda z} \right) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{4} \text{sinc}^2 \left(a \frac{x_0}{\lambda z} \right) + \frac{m^2}{16} \text{sinc}^2 \left[\frac{a}{\lambda z} (x_0 - \lambda z v_0) \right] + \frac{m^2}{16} \text{sinc}^2 \left[\frac{a}{\lambda z} (x_0 + \lambda z v_0) \right] \right\}. \quad (2.109)$$

З аналізу функції (2.109) видно, що дифракційна картина має три головних максимуми – центральний і два бокових. Відстань між центральним і боковими максимумами визначається просторовою частотою дифракційної ґратки v_0 і становить $\lambda z v_0$. Ширина головних максимумів пропорційна $\lambda z/a$, тому роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda z v_0}{\lambda z/a} = av_0 = N_d, \quad (2.110)$$

де N_d – кількість штрихів (періодів) у дифракційній ґратці (рис. 2.13).

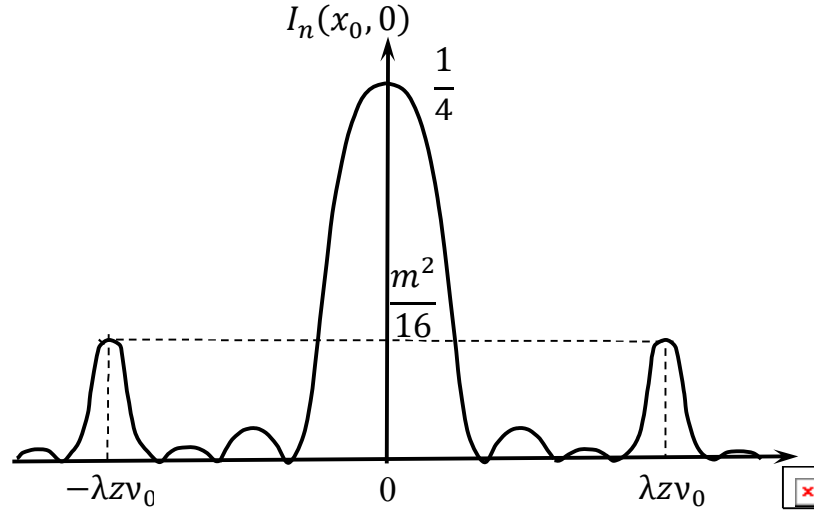


Рис. 2.14. Нормований розподіл інтенсивності для дифракції Фраунгофера на синусоїдальній дифракційній ґратці

Графік функції (2.109), який отримано за умови, що головні максимуми не перекриваються, подано на рис. 2.14.

2.8. Дифракція Френеля на прямокутному отворі

Враховуючи математичні труднощі під час розрахунку дифракційних картин Френеля за формулою (2.56), розглянемо лише найпростіший випадок дифракції на прямокутному отворі розміром $a \times b$ (рис. 2.17), амплітудний коефіцієнт пропускання якого описується функцією (2.66).

Нехайна такий екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди. Тоді розподіл поля безпосередньо за екраном визначають за співвідношенням (2.67):

$$V(x, y) = t(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right), \quad (2.111)$$

де функцію rect визначають за співвідношенням (2.98).

Підставимо співвідношення (2.111) у рівняння (2.56):

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]\right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} L(x_0) L(y_0), \end{aligned} \quad (2.112)$$

де

$$L(x_0) = \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_0 - x)^2\right] dx; \quad (2.113)$$

$$L(y_0) = \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (y_0 - y)^2\right] dy. \quad (2.114)$$

Щоб обчислити інтеграл (2.113) замінимо змінні:

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x - x_0); x = \xi \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} + x_0; dx = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} d\xi. \quad (2.115)$$

За цих умов межі інтегрування визначають із виразів (2.115) як

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{a}{2} + x_0\right); \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{a}{2} - x_0\right). \quad (2.116)$$

Тоді

$$\begin{aligned} L(x_0) &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{j\frac{\pi}{2}\xi^2} \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} d\xi = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left[\int_0^{\xi_2} e^{j\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi - \int_0^{\xi_1} e^{j\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left[\int_0^{\xi_2} \left(\cos \frac{\pi}{2}\xi^2 + j \sin \frac{\pi}{2}\xi^2 \right) d\xi - \int_0^{\xi_1} \left(\cos \frac{\pi}{2}\xi^2 + j \sin \frac{\pi}{2}\xi^2 \right) d\xi \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \{ [C(\xi_2) - C(\xi_1)] + j[S(\xi_2) - S(\xi_1)] \}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

де $C(\alpha)$ і $S(\alpha)$ – інтеграли Френеля,

$$C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos \frac{\pi}{2}\xi^2 d\xi; \quad S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin \frac{\pi}{2}\xi^2 d\xi. \quad (2.118)$$

Аналогічно обчислимо інтеграл (2.114):

$$L(y_0) = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \{ [C(\eta_2) - C(\eta_1)] + j[S(\eta_2) - S(\eta_1)] \}, \quad (2.119)$$

де

$$\eta_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{b}{2} + y_0\right); \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{b}{2} - y_0\right). \quad (2.120)$$

Підставимо рівняння (2.117) і (2.119) у співвідношення (2.112):

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \{ [C(\xi_2) - C(\xi_1)] + j[S(\xi_2) - S(\xi_1)] \} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \{ [C(\eta_2) - C(\eta_1)] + j[S(\eta_2) - S(\eta_1)] \}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Розподіл інтенсивності для дифракції Френеля на прямокутному отворі описується функцією

$$\begin{aligned} I(x_0, y_0) &= V \cdot V^* = \frac{1}{4} \{ [C(\xi_2) - C(\xi_1)]^2 + [S(\xi_2) - S(\xi_1)]^2 \} \times \\ &\times \{ [C(\eta_2) - C(\eta_1)]^2 + [S(\eta_2) - S(\eta_1)]^2 \}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Отримані формули (2.121) і (2.122) дають змогу розрахувати амплітуду та інтенсивність поля в будь-якій точці (x_0, y_0) простору.

Інтеграли Френеля можна обчислити за допомогою спіралі Корню, відповідних таблиць і комп'ютерних програм.

Розглянемо два випадки розрахунку дифракційної картини Френеля.

1. **Екрана немає**, тобто $-\infty < a < \infty$; $-\infty < b < \infty$. Із формул (2.116) і (2.120) маємо $\xi_1 = -\infty$, $\xi_2 = \infty$, $\eta_1 = -\infty$, $\eta_2 = \infty$.

Із довідника [3] знаходимо, що інтеграли Френеля (2.118) становлять $C(\infty) = S(\infty) = 0,5$ і $C(-\infty) = S(-\infty) = -0,5$. Тоді $I(x_0, y_0) = 1$.

2. **Екран являє собою півплощину**, тобто $-\infty < a < 0$; $-\infty < b < \infty$ (рис. 2.15). Із формул (2.116) і (2.120) маємо $\xi_1 = -\infty$, $\xi_2 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} x_0$, $\eta_1 = -\infty$, $\eta_2 = \infty$.

Тоді

$$I(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left\{ \left[C \left(-\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} x_0 \right) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[S \left(-\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} x_0 \right) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\}. \quad (2.123)$$

Дифракційна картина Фраунгофера (2.123) на півплощині являє собою світлі і темні смуги, паралельні краю півплощини (рис. 2.16). Смуги розміщені на освітленому боці і зменшуються до 1 з віддаленням від краю. На краю півплощини інтенсивність становить $1/4$, причому частина світлового потоку поширюється на область геометричної тіні екрана.

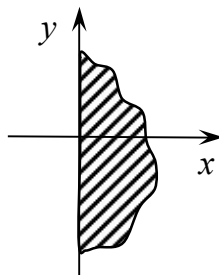


Рис. 2.15. Екран у вигляді півплощини

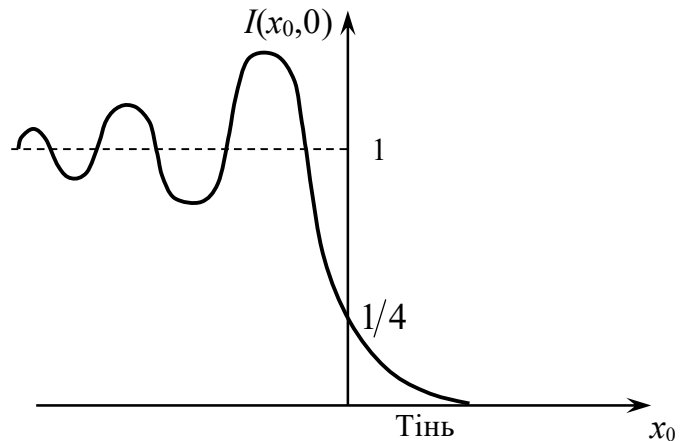


Рис. 2.16. Розподіл інтенсивності для дифракції Френеля на півплощині

2.9. Приклади розрахунку дифракційних картин

Приклад 2.1. Знайдіть вираз для радіусів зон Френеля, якщо ці зони побудовані з боку увігнутої поверхні хвильового фронту сферичної хвилі, що збігається, з радіусом r_0 .

Розв'язання. Розглянемо рис. 2.17. Із трикутника QO_1P_0 маємо

$$R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - x)^2 = 2r_0x - x^2,$$

де R_q – радіус q -ї зони Френеля, $R_q = QO_1$.

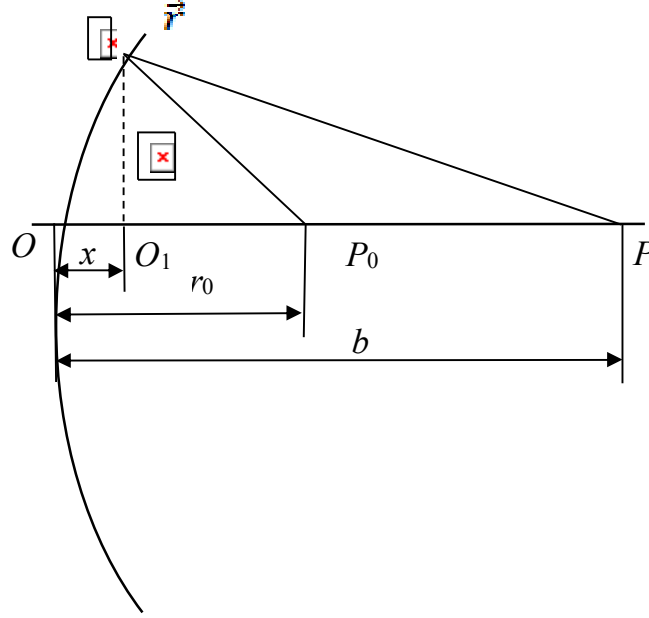


Рис. 2.17. До прикладу 2.1

Із трикутника QO_1P_0 маємо

$$R_q^2 = \left(b - \frac{q\lambda}{2}\right)^2 - (b - x)^2 = -bq\lambda +$$

де амплітуда поля в отворі екрана згідно із співвідношенням (2.67) визначається функцією

$$V(x) = V_0 t(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.126)$$

Підставивши функцію (2.126) у вираз (2.125), маємо

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-jk \sin \varphi_d \cdot x) dx. \quad (2.127)$$

Щоб розрахувати інтеграл (2.127) використаємо табличний інтеграл $\int e^{cx} dx = e^{cx}/c$, де $c = -jk \sin \varphi_d$. Тоді

$$\begin{aligned} V(\varphi_d) &= \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{-jk \sin \varphi_d} \exp(-jk \sin \varphi_d \cdot x) \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{-jk \sin \varphi_d} \left[\exp\left(-jk \sin \varphi_d \cdot \frac{a}{2}\right) - \exp\left(jk \sin \varphi_d \cdot \frac{a}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Скористаємося формулою Ейлера $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$. Тоді

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{\pi \sin \varphi_d} \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right) = \frac{a}{j\lambda z} \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d}. \quad (2.128)$$

Розподіл інтенсивності визначають з амплітуди поля (2.128) як

$$I(\varphi_d) = |V(\varphi_d)|^2 = \left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d} \right]^2. \quad (2.129)$$

Знайдемо максимальне значення інтенсивності (2.129) у центральному (нульовому) максимумі, коли $\varphi_d = 0$. Для цього використаємо границю $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$, де $x = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d$. Тоді $I(0) = \left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2$, а нормований розподіл інтенсивності

$$I_n(\varphi_d) = \frac{I(\varphi_d)}{I(0)} = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d} \right]^2. \quad (2.130)$$

Графік функції $I_n(\varphi_d)$ зображено на рис. 2.18.

Визначимо кути дифракції, які відповідають мінімумам інтенсивності в дифракційній картині функції (2.130), виходячи з рівняння $I_n(\varphi_{d,m}^{min}) = 0$. Використовуючи функцію (2.130), отримаємо рівняння $\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{min}\right) = 0$. Звідси $\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{min} = m\pi$, або $a \sin \varphi_{d,m}^{min} = m\lambda$. З цього рівняння знаходимо, що

$$\varphi_{d,m}^{min} = \arcsin\left(m \frac{\lambda}{a}\right). \quad (2.131)$$

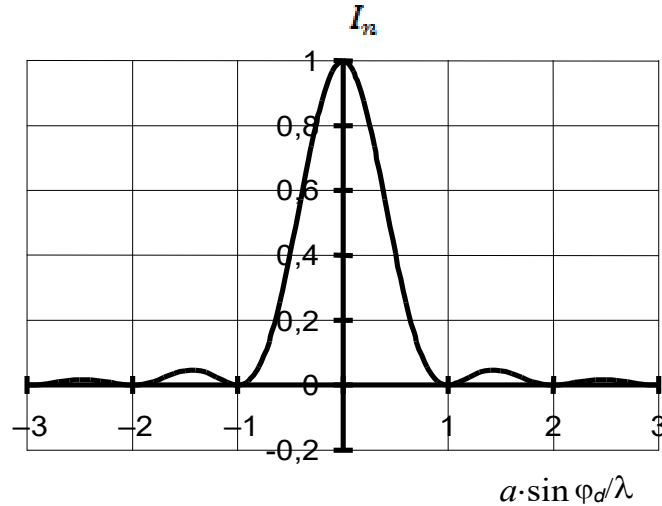


Рис. 2.18. Графік функції (2.130)

Знайдемо кути дифракції, які відповідають максимумам інтенсивності в дифракційній картині за функцією (2.130), виходячи із рівняння

$$\frac{dI(\varphi_d)}{d\varphi_d} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]}{dx} = 0, \quad \text{де} \quad x = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d. \quad \text{Звідси} \quad x = \operatorname{tg} x \quad \text{або} \quad \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{\max} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{\max} \right).$$

Розв'язавши це трансцендентне рівняння, можна знайти кути дифракції, що відповідають максимумам. Наприклад, для першого максимуму рівняння має розв'язок $x_1 = 1,43\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,1}^{\max}$. Звідси $\varphi_{d,1}^{\max} = \arcsin \left(\frac{a}{1,43\lambda} \right)$.

Приклад 2.3. Екран, на якому відбувається дифракція, має п'ять прямокутних діафрагм (рис. 2.19). Визначте амплітуду поля дифракційної картини Фраунгофера. Побудуйте графік розподілу інтенсивності цієї картини.

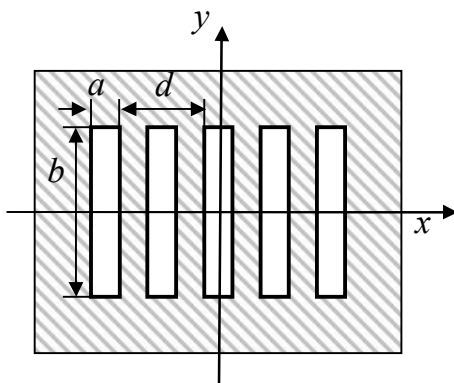


Рис.2.19. Екран із прямокутних діафрагм, на якому відбувається дифракція

Розв'язання. 1. Розглянемо спочатку дифракцію Фраунгофера (2.65), що формується центральною діафрагмою, яка має амплітудний коефіцієнт пропускання

$$t_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } |x| \leq \frac{a}{2}; \quad |y| \leq \frac{b}{2}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Розподіл амплітуди поля в такій дифракційній картині описується функцією (2.71):

$$V_0(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right). \quad (2.132)$$

2. Амплітудний коефіцієнт пропускання всього екрана можна подати у вигляді окремих складових:

$$\begin{aligned} t(x, y) &= t_{-2} + t_{-1} + t_0 + t_1 + t_2 = \\ &= t_0(x + 2d, y) + t_0(x + d, y) + t_0(x, y) + t_0(x - d, y) + t_0(x - 2d, y). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Якщо екран освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди, то згідно з рівнянням дифракції Фраунгофера (2.65) розподіл амплітуди поля у дифракційній картині визначається перетворенням Фур'є $V(x_0, y_0) = F\{t(x, y)\}$ для просторових частот перетворення (2.61). Підставимо вираз (2.133) у рівняння (2.65) і використаємо теорему зміщення відносно перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= F\{t_0(x, y)\} \times \\ &\times [\exp(j4\pi d\nu_x) + \exp(j2\pi d\nu_x) + 1 + \exp(-j2\pi d\nu_x) + \exp(-j4\pi d\nu_x)]. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Вираз у квадратних дужках являє собою геометричну прогресію зі знаменником $q = \exp(-j2\pi d\nu_x)$, сума якої

$$\begin{aligned} &\frac{\exp(j4\pi d\nu_x) - \exp(-j2\pi d\nu_x) \exp(-j4\pi d\nu_x)}{1 - \exp(-j2\pi d\nu_x)} = \\ &= \frac{\exp(-j\pi d\nu_x) [\exp(j5\pi d\nu_x) - \exp(-j5\pi d\nu_x)]}{\exp(-j\pi d\nu_x) [\exp(j\pi d\nu_x) - \exp(-j\pi d\nu_x)]} = \frac{\sin(5\pi d\nu_x)}{\sin(\pi d\nu_x)}. \end{aligned}$$

З урахуванням цієї суми, а також перетворення (2.61) і (2.132), амплітуду поля в дифракційній картині виразу (2.134) визначимо як

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right) \left[\frac{\sin(5\pi d\nu_x)}{\sin(\pi d\nu_x)} \right]. \quad (2.135)$$

3. Розглянемо приклад розрахунку інтенсивності, коли $d = 2a$, тоді для амплітуди поля (2.135) маємо

$$\begin{aligned} I(x_0, y_0) &= |V|^2 = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{by_0}{\lambda z}\right) \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{ax_0}{\lambda z}\right)}{\frac{ax_0}{\lambda z}} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{10\pi ax_0}{\lambda z}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi ax_0}{\lambda z}\right)} \right]^2 = \\ &= \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{by_0}{\lambda z}\right) \right]^2 \left[5 \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{10\pi ax_0}{\lambda z}\right)}{\cos\left(\frac{\pi ax_0}{\lambda z}\right)} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.136)$$

У центрі дифракційної картини інтенсивність (2.136) становитиме

$$I(0,0) = \left(\frac{5ab}{\lambda z}\right)^2. \quad (2.137)$$

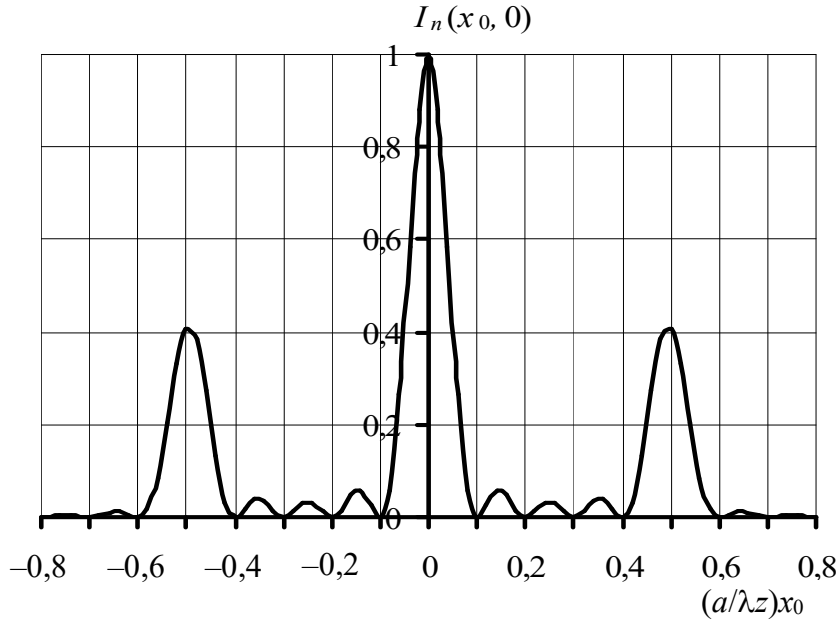


Рис. 2.20. Нормований розподіл інтенсивності
під час дифракції Фраунгофера на ґратці (2.138)

З урахуванням інтенсивності (2.137) одновимірний нормований розподіл інтенсивності вздовж осі x_0 за $y_0 = 0$ подано на рис. 2.20,

$$I_n(x_0, 0) = \left[\frac{\text{sinc}\left(\frac{10ax_0}{\lambda z}\right)}{\cos\left(\frac{\pi ax_0}{\lambda z}\right)} \right]^2. \quad (2.138)$$

З аналізу функції (2.138) видно, що вона має центральний і два бокові головні максимуми. Бокові максимуми розміщені в точках з координатами $(\pm \frac{\lambda z}{2a})$ і мають амплітуду $4/\pi^2$.

Приклад 2.4. Виведіть формулу Релея (2.96), використовуючи співвідношення (2.95).

Розв'язання. Подамо співвідношення (2.95) у вигляді

$$L(R_0) = \frac{2\pi^2 R^2}{(\lambda z)^2} \int_0^{R_0} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0\right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0} \right]^2 r_0 dr_0.$$

Замінімо змінні: $2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0 = x$; $r_0 = \frac{\lambda z}{2\pi R} x$; $dr_0 = \frac{\lambda z}{2\pi R} dx$.

Тоді

$$L(R_0) = \frac{2\pi^2 R^2}{(\lambda z)^2} 4 \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} \frac{J_1^2(x)}{x^2} \left(\frac{\lambda z}{2\pi R} \right)^2 x dx = 2 \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} \frac{J_1^2(x)}{x} dx. \quad (2.139)$$

Для обчислення інтеграла (2.139) скористаємося співвідношенням (9.1.27) з довідника [3]:

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x). \quad (2.140)$$

Помножимо праву і ліву частини рівняння (2.140) на $J_1(x)$:

$$J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = J_1(x)J_0(x) - \frac{1}{x}J_1^2(x). \quad (2.141)$$

Із співвідношення (2.91) за $n = 0$ маємо

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x). \quad (2.142)$$

Із системи рівнянь (2.141) і (2.142) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}J_1^2(x) &= J_1(x)J_0(x) - J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = \\ &= -J_0(x) \frac{dJ_0(x)}{dx} - J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [J_0^2(x) + J_1^2(x)]. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Підставимо співвідношення (2.143) в інтеграл (2.139):

$$L(R_0) = - \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} d[J_0^2(x) + J_1^2(x)] = 1 - J_0^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right) - J_1^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right). \quad (2.144)$$

Отриманий вираз (2.144) збігається з формулою Релея (2.96).

Приклад 2.5. Форму отвору в екрані показано на рис. 2.21. Екран освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди з довжиною хвилі λ . Визначте комплексну амплітуду та інтенсивність поля у точці $x_0 = y_0 = 0$, якщо дифракція Френеля спостерігається на відстані z за екраном.

Розв'язання. Амплітуду поля під час дифракції Френеля визначають за формулою (2.56). У центрі дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$, ця формула матиме вигляд

$$V(0,0) = \frac{1}{j\lambda z} \times \iint_{-\infty}^{\infty} V(x,y) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] dx dy. \quad (2.145)$$

Нехай екран має амплітудний коефіцієнт пропускання $t(x,y)$.

Тоді амплітуду поля безпосередньо за екраном можна знайти за виразом

$$V(x,y) = V_0 t(x,y) = t(x,y). \quad (2.146)$$

Підставимо вираз (2.146) у формулу (2.145), отримаємо

$$\begin{aligned} V(0,0) &= \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \cos\left[\frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] dx dy + \\ &+ \frac{1}{j\lambda z} j \iint_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \sin\left[\frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] dx dy = \frac{1}{\lambda z} (I_s - jI_c). \end{aligned} \quad (2.147)$$

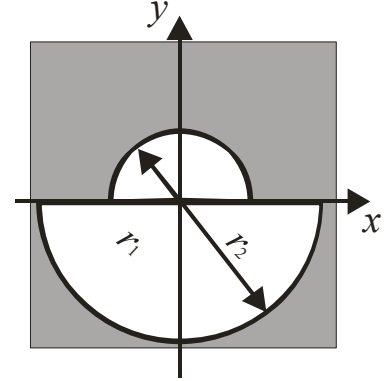


Рис. 2.21. До прикладу 2.5

Щоб обчислити функцію (2.147) перейдемо до полярної системи координат r, φ : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$. Використовуючи рис. 2.21, запишемо амплітудний коефіцієнт пропускання екрана у полярній системі координат:

$$t(x, y) = t(r, \varphi) = \begin{cases} 1, \text{коли } 0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ 1, \text{коли } 0 \leq r \leq r_2, \pi \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.148)$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_c &= \int_0^{r_1} \int_0^\pi \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi + \int_0^{r_2} \int_\pi^{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi = \\ &= \frac{\lambda z}{2\pi} \int_0^{r_1} \int_0^\pi \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) d\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) d\varphi + \int_0^{r_2} \int_\pi^{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) d\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) d\varphi = \\ &= \frac{\lambda z}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]; \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^{r_1} \int_0^\pi \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi + \int_0^{r_2} \int_\pi^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi = \\ &= -\frac{\lambda z}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Підставимо інтеграли (2.149) і (2.150) у функцію (2.147):

$$V(0,0) = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right] + j \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right] \right\}. \quad (2.151)$$

Інтенсивність поля в точці $x_0 = y_0 = 0$ для амплітуди поля (2.151) знаходять за формулою

$$\begin{aligned} I(0,0) &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]^2 + \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi}{\lambda z} (r_2^2 - r_1^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Приклад 2.6. Знайдіть інтенсивність світлового поля в центрі картини дифракції Френеля, що відбувається на отворі, який освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди, якщо його коефіцієнт пропускання

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.153)$$

Розв'язання. Запишемо рівняння дифракції Френеля (2.56) для центра дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$,

$$V(0,0) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] dx dy. \quad (2.154)$$

Якщо на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$, то для функції (2.153) амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.155)$$

У зв'язку з тим, що функція (2.155) вісесиметрична, запишемо її й рівняння дифракції Френеля (2.154) у полярній системі координат. Замінімо змінні: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$. Тоді

$$V(x, y) = V(r) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq r \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad (2.156)$$

$$V(0) = \frac{1}{j\lambda z} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty V(r) \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi. \quad (2.157)$$

Підставимо функцію (2.156) у рівняння (2.157):

$$V(0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^R \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr. \quad (2.158)$$

Для розрахунку (2.158) скористаємося табличним інтегралом (1.3.3.7) з довідника [3]:

$$\int e^{-ax^2} x dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2}, \quad (2.159)$$

де $x = r$; $a = -j \frac{\pi}{\lambda z}$.

Використовуючи інтеграл (2.159), маємо

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{2\pi}{j\lambda z} \left(\frac{\lambda z}{2j\pi}\right) \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) \Big|_0^R = 1 - \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) = \\ &= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right). \end{aligned} \quad (2.160)$$

За умови (2.160) інтенсивність світла у точці $x_0 = y_0 = 0$

$$I(0,0) = |V|^2 = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi R^2}{2\lambda z}\right).$$

2.10. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.1. Плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 0,5$ мкм) з інтенсивністю I_0 нормально падає на діафрагму з круглим отвором діаметром 2 мм. Знайдіть відстані b_1, b_2, b_3, \dots від діафрагми до точок P_1, P_2, P_3, \dots , для яких в отворі вміщується 1, 2, 3, ... зони Френеля відповідно. Побудуйте наближено графік залежності інтенсивності у точці спостереження $I(b)$.

Відповідь:

q	1	2	3	4	5	∞
b_q , см	200	100	66	50	40	0
$I(b)$	$4I_0$	Приблизно	Менше	Більше	Менше	I_0

		0	$4I_0$	0	$4I_0$	
--	--	---	--------	---	--------	--

Задача 2.2. На шляху плоскої світлової хвилі з $\lambda = 589$ нм встановлено фокусувальну лінзу з фокусною відстанню $f = 300$ мм. Безпосередньо за лінзою розміщено діафрагму з круглим отвором, а на відстані $b = 1$ м від цієї діафрагми перебуває екран. Знайдіть мінімальний радіус отвору у діафрагмі, за якого у точці спостереження на екрані буде максимум освітленості.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 2.1.

$$\text{Відповідь: } R_1 = \sqrt{\frac{fb}{b-f}} \lambda = 0,5 \text{ мм.}$$

Задача 2.3. Між точковим джерелом монохроматичного світла з довжиною хвилі λ та екраном розмістили діафрагму з круглим отвором, радіус якого може змінюватись у процесі досліду. Відстань від діафрагми до джерела $r_0 = 1000$ мм, а відстань від діафрагми до екрана $b = 1500$ мм. Знайдіть довжину хвилі світла λ , якщо максимум освітленості у центрі дифракційної картини спостерігається за радіуса отвору в діафрагмі $R_1 = 1$ мм, а наступний максимум – за $R_2 = 1,58$ мм.

$$\text{Відповідь: } \lambda = \frac{(R_2^2 - R_1^2)(r_0 + b)}{2r_0 b} = 1,25 \text{ мкм.}$$

Задача 2.4. Основна фокусна відстань зонної пластинки Френеля $f_1 = R_1^2/\lambda$, тобто в радіусі R_1 розміщується лише перша зона. Знайдіть її інші фокусні відстані.

$$\text{Відповідь: } f_q = \frac{f_1}{2q+1}.$$

Задача 2.5. Точкове джерело світла з двома монохроматичними лініями $\lambda_1 = 560$ нм і $\lambda_2 = 280$ нм однакової інтенсивності розміщено на відстані $L = 1$ м від екрана. Перед екраном на відстані $a = 0,2$ м встановлено прозорий диск діаметром $D = 0,6$ мм, який вносить фазову затримку у π разів для обох компонентів. Джерело світла, центри диска та екрана розміщені на одній осі. Як залежить інтенсивність світла у центрі екрана від наявності екрана?

$$\text{Відповідь: } I_{01} = I_{02} = \frac{1}{2} I_0;$$

$$q_1 = 1, V_1(P) = -\frac{3}{2} V_{11}, I_1 = 9I_{01};$$

$$q_2 = 2, V_2(P) = -\frac{3}{2} V_1 + V_2 \approx -\frac{1}{2} V_{12}, I_2 = I_{02}, I(P) = I_1 + I_2 = 5I_0.$$

Задача 2.6. Між точковим джерелом монохроматичного світла і точкою спостереження перпендикулярно лінії, яка з'єднує їх, встановлено непрозорий екран, що складається із двох кругів (рис. 2.22). Радіус одного з них відповідає першій зоні Френеля, а радіус другого – другій зоні Френеля. Визначте інтенсивність світла у точці спостереження, якщо, коли немає екрана, вона дорівнює I_0 .

Відповідь: $V(P) = -\frac{1}{4}V_2 + V_3 - V_4 + \dots \approx \frac{1}{4}V_1; I(P) = \frac{1}{4}I_0$.

Задача 2.7. Вдалині від точкового джерела S встановлено нескінченний екран, який ідеально відбиває світло. З екрана вилучено диск діаметром $D_1 = 2R_1\sqrt{2/3}$, де R_1 – радіус першої зони Френеля, і встановлено інший диск діаметром $D_2 = R_1\sqrt{2}$ (рис. 2.23). Знайдіть у точці S інтенсивність світла $I(S)$, що відбилося від екрана, якщо диск діаметром D_2 розміщений у площині екрана.

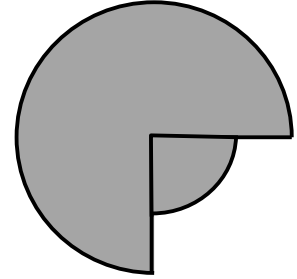


Рис. 2.22. До задачі 2.6

Відповідь: Інтенсивність світла у точці S формується всіма зонами Френеля за винятком непрозорої частини першої зони. Частка площі непрозорої частини першої зони становить $\frac{D_1^2 - D_2^2}{4R_1^2} = \frac{1}{6}$;

$$V(S) = \frac{5}{6}V_1 - V_2 + V_3 - \dots \approx \frac{1}{6}V_1 + \frac{1}{2}V_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}V_1\right); I(S) = \frac{4}{9}I_0.$$

Задача 2.8. Фазова зонна пластинка виготовлена з матеріалу з показником заломлення $n = 1,5$. Яку мінімальну висоту h мають мати виступи над парними (або непарними) зонами пластинки для довжини хвилі $\lambda_0 = 500$ нм?

Відповідь: $h = \frac{\lambda_0}{2(n-1)} = 500$ нм.

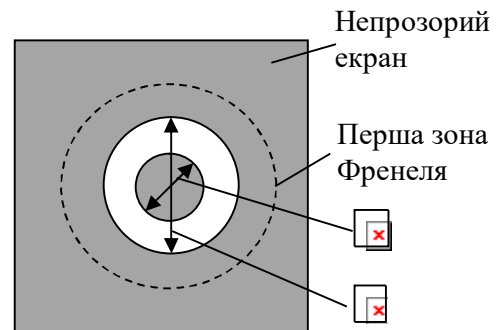


Рис. 2.23. До задачі 2.7

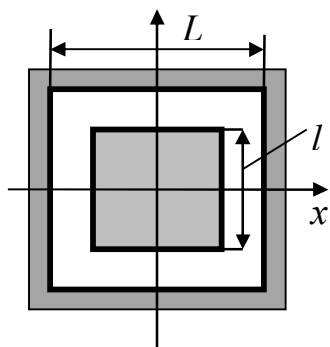


Рис. 2.24. До задачі 2.9

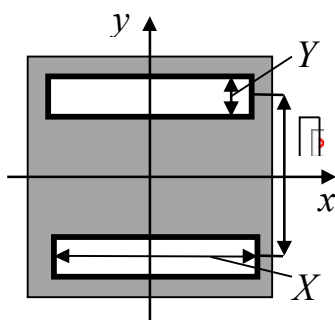


Рис. 2.25. До задачі 2.10

Задача 2.9. Виведіть вираз для розподілу інтенсивності у картині дифракції Фраунгофера на отворі, який зображено на рис. 2.24. Вважається, що отвір освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею, амплітуда якої дорівнює одиниці.

Відповідь:
$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right)^2 \times \left[L^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{Lx_0}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{Ly_0}{\lambda z}\right) - l^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right) \right]^2.$$

Задача 2.10. Екран освітлює нормально падаюча монохроматична хвиля, амплітуда якої дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності у дифракційній картині Фраунгофера на двох щілинах (рис. 2.25). Побудуйте графіки нормованого розподілу вздовж осей x_0 та y_0 площини спостереження, якщо $\frac{X}{\lambda z} = 10 \text{ м}^{-1}$; $\frac{Y}{\lambda z} = 1 \text{ м}^{-1}$;

$\frac{\Delta}{\lambda z} = 1,5 \text{ м}^{-1}$, де λ – довжина хвилі; z – відстань від екрана до площини спостереження.

Відповідь:
$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right)^4 \left[X \operatorname{sinc}\left(\frac{Xx_0}{\lambda z}\right) \right]^2 \times \left[(\Delta + Y) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\Delta + Y)y_0}{\lambda z}\right) - (\Delta - Y) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\Delta - Y)y_0}{\lambda z}\right) \right]^2;$$

$$I(0,0) = \left(\frac{2XY}{\lambda z}\right)^2;$$

$$I_n(x_0, y_0) = \frac{I(x_0, y_0)}{I(0,0)} = \{ \operatorname{sinc}(10x_0) [1,25 \operatorname{sinc}(2,5y_0) - 0,25 \operatorname{sinc}(0,5y_0)] \}^2.$$

Задача 2.11. На екран із круглим отвором діаметром 40 мм нормально падає плоска монохроматична хвиля, довжина якої становить 0,5 мкм, а амплітуда дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності у дифракційній картині Фраунгофера, якщо фокусна відстань фокусувальної лінзи становить 100 мм. Побудуйте графік цього розподілу.

Відповідь:
$$I_n(r_0) = \left[\frac{2J_1\left(\frac{2\pi \cdot 20}{0,5 \cdot 10^3 \cdot 100} r_0\right)}{\frac{2\pi \cdot 20}{0,5 \cdot 10^3 \cdot 100} r_0} \right]^2 = \left[\frac{2J_1(2,5r_0)}{2,5r_0} \right]^2,$$

де r_0 вимірюється у мкм.

Задача 2.12. Екран із круглим кільцевим отвором із зовнішнім і внутрішнім радіусами $R_1 = 20$ мм та $R_2 = 10$ мм освітлюється нормально падаючою монохроматичною хвилею, довжина якої становить $0,5$ мкм, а амплітуда дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності в дифракційній картині Фраунгофера, якщо фокусна відстань фокусувальної лінзи становить 100 мм. Побудуйте графік нормованого розподілу інтенсивності.

Відповідь:
$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \left(\frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \right)^2 \left[R_1^2 \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R_1}{\lambda f} r_0\right)}{\frac{2\pi R_1}{\lambda f} r_0} - R_2^2 \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R_2}{\lambda f} r_0\right)}{\frac{2\pi R_2}{\lambda f} r_0} \right]^2.$$

Задача 2.13. Визначте нормовану інтенсивність дифракційної картини Фраунгофера, якщо плоска хвиля одиничної амплітуди нормально падає на екран із кільцевою діафрагмою з радіусами $2R$ та R . Отриманий результат порівняйте з дифракцією Фраунгофера на круглому отворі з радіусом $2R$. Побудуйте відповідні графіки нормованої інтенсивності за $R = 10$ мм.

Відповідь:
$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \frac{1}{9} \left[4 \frac{2J_1\left(\frac{4\pi R}{\lambda f} r_0\right)}{\frac{4\pi R}{\lambda f} r_0} - \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda f} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f} r_0} \right]^2.$$

Задача 2.14. Знайдіть розподіл поля в дифракційній картині Фраунгофера на синусоїдальній фазовій ґратці, яка має комплексний амплітудний коефіцієнт пропускання,

$$t(x, y) = \exp \left[j \frac{m}{2} \sin(2\pi \nu_0 x) \right] \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{b} \right),$$

де m – глибина фазової модуляції; ν_0 – просторова частота ґратки.

Відповідь:

$$V(x_0, y_0) = \left(\frac{ab}{\lambda z} \right)^2 \text{sinc} \left(\frac{by_0}{\lambda z} \right) \sum_{n=0}^{\infty} J_n(m) \text{sinc} \left[\frac{a}{\lambda z} (x_0 + \lambda z n \nu_0) \right] \left(\frac{ax_0}{\lambda z} \right),$$

де J_n – функція Бесселя n -го порядку; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

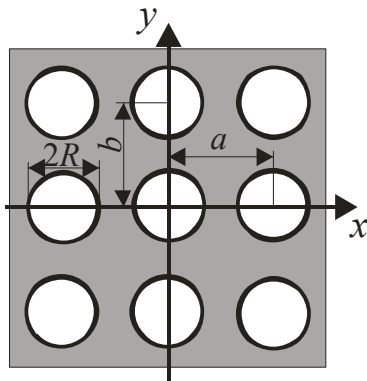


Рис. 2.26. До задачі 2.15

Задача 2.15. Екран, на якому відбувається дифракція Фраунгофера, являє собою прямокутну ґратку із $n \times m$ ідентичних круглих діафрагм з радіусом R , розміщених як показано на рис. 2.26. Визначте інтенсивність відповідної картини дифракції.

$$\text{Відповідь: } I(x, y) = \left(\frac{\pi R^2 V_0}{\lambda z} \right)^2 \left[\frac{2J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}} \right]^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a n}{\lambda z} x_0 \right) \sin \left(\frac{\pi b m}{\lambda z} y_0 \right)}{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0 \right) \sin \left(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0 \right)} \right]^2.$$

Задача 2.16. На щілину шириною $b = 10$ мм падає під кутом $\varepsilon = 2^\circ$ плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди з довжиною $\lambda = 0,5$ мкм. Хвильовий вектор \vec{k} перебуває у площині yz , а щілина – у площині xu . За екраном встановлено фокусувальну лінзу з фокусною відстанню $f = 100$ мм. Виведіть функцію, яка описує розподіл інтенсивності у дифракційній картині Фраунгофера. Побудуйте графік нормованого розподілу інтенсивності $I(y_0)$.

Вказівка: Скористайтесь рівнянням дифракції Фраунгофера (2.65) для одновимірного випадку. Для визначення амплітуди падаючої хвилі у площині екрана використайте рівняння плоскої монохроматичної хвилі (1.18).

$$\text{Відповідь: } I_n(y_0) = \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi b}{\lambda f} (f \sin \varepsilon - y_0) \right].$$

Задача 2.17. Форму отвору в екрані показано на рис. 2.27. Екран освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди довжиною $\lambda = 0,5$ мкм. Знайдіть комплексну амплітуду та інтенсивність поля в точці $x_0 = y_0 = 0$, якщо дифракція Френеля спостерігається на відстані $z = 2$ м за екраном.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 2.5.

$$\text{Відповідь: } V(0,0) = 1 - \frac{3}{4} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_1^2 \right) - \frac{1}{4} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_2^2 \right) = 1,5,$$

де $r_1 = 1$ мм і $r_2 = 2$ мм; $I(0,0) = |V(0,0)|^2 = 2,25$.

Задача 2.18. Виконайте перетворення (2.60), яке визначає передавальну функцію Френеля.

Задача 2.19. Доведіть, що передавальна функція дифракції Френеля (2.60) є окремим випадком передавальної функції вільного простору (1.40) з урахуванням обмежень (2.54), зумовлених дифракцією Френеля.

Задача 2.20. Отвір у непрозорому екрані освітлюється сферичною хвилею, яка збігається в точці P , розміщеній у площині, що паралельна екрану і перебуває на відстані z за отвором (рис. 2.27). Знайдіть квадратичне наближення хвильового фронту падаючої хвилі у площині отвору. Вважаючи, що дифракція Френеля

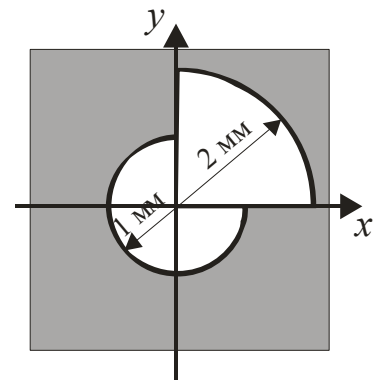


Рис. 2.27. До задачі 2.17

на отворі спостерігається в площині, яка містить точку P_0 , покажіть, що розподіл інтенсивності являє собою дифракційну картину Фраунгофера на отворі з центром у точці P .

Відповідь: $V(x, y, z) \approx \frac{V_0}{z} \exp(-jkz) \exp\left\{-j \frac{\pi}{\lambda z} [(y - Y_0)^2 + x^2]\right\};$

$$V(x_0, y_0) \sim \iint_{\Sigma} \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda z} [x_0 x + (y_0 - Y_0)y]\right\} dx dy.$$

Задача 2.21. Плоска хвиля одиничної амплітуди довжиною $\lambda = 0,5$ мкм нормально падає на півплощину. Користуючись виразом (2.123), визначте положення максимумів і мінімумів дифракційної картини Френеля на відстані $z = 2$ м за екраном.

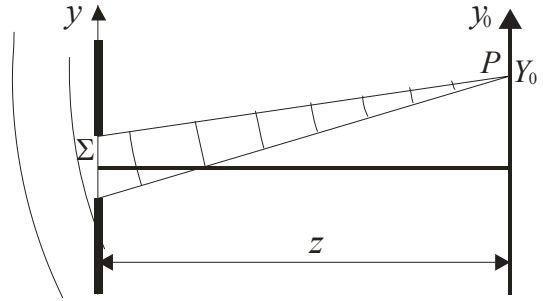


Рис. 2.28. До задачі 2.20

Відповідь: $x_{0,max} = -0,86; -1,66; -2,18$ мм.; $x_{0,min} = -1,33; -1,94; -2,40$ мм.

Задача 2.22. Знайдіть інтенсивність світлового поля на осі картини дифракції Френеля на отворі, який освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди, якщо його коефіцієнт пропускання

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Вказівка: Скористайтесь прикладом 2.6.

Відповідь: $I(0,0) = \left(\frac{2\pi}{\lambda z}\right)^2 \sin^2 \left[\frac{\pi}{2\lambda z} (1 - a^2) \right].$

Задача 2.23. Отвір екрана освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди. Знайдіть картину дифракції Френеля на нескінченному отворі, який має амплітудний коефіцієнт пропускання $t(x, y) = \frac{1}{2} [1 + m \sin(2\pi \nu_0 x)]$, де $0 < m < 1$.

Відповідь:

$$I(x_0, y_0) = \frac{1}{4} + \frac{m^2}{16} \left\{ \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 - \nu_0 \lambda z)^2 \right] - \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 + \nu_0 \lambda z)^2 \right] \right\}^2.$$

Розділ 3. ДИФРАКЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

Основним елементом більшості оптичних систем є сферична лінза. Із геометричної оптики відомо, що найчастіше лінзи використовують для формування зображення. Але поряд з цим лінзи можна використовувати для здійснення фазових перетворень і перетворень Фур'є.

У цьому розділі розглянуто властивості лінзи на основі скалярної теорії дифракції. При цьому процес перетворення Фур'є, який виконується лінзою, не можна розглядати з погляду геометричної оптики.

3.1. Тонка лінза як елемент, що виконує фазове перетворення

Лінзу називають *тонкою*, якщо промінь, що падає на одну поверхню лінзи в точці з координатами (x, y) , виходить з другої поверхні в точці майже з такими самими координатами. Іншими словами, поперечними зміщеннями променів у тонкій лінзі можна знехтувати. З погляду геометричної оптики це означає, що головні площини H і H' збігаються. Отже, тонка лінза просто затримує фронт падаючої хвилі на значення, пропорційне товщині $d(x, y)$ лінзи у кожній точці.

Припустимо, що $V(x, y)$ і $V'(x, y)$ – комплексні амплітуди світлового поля у площинах 1 та 2, перпендикулярних до оптичної осі z і дотичних до сферичних поверхонь лінзи (рис. 3.1). Тоді

$$V'(x, y) = V(x, y)t_l(x, y), \quad (3.1)$$

де $t_l(x, y)$ – комплексний амплітудний коефіцієнт пропускання лінзи.

Якщо не враховувати втрати випромінювання за рахунок френелівських втрат на відбиття та поглинання у лінзі, то

$$t_l(x, y) = \exp[j\varphi_l(x, y)], \quad (3.2)$$

де $\varphi_l(x, y)$ – фазове зміщення у точці з координатами (x, y) , яке вносить лінза.

Визначимо фазове зміщення $\varphi_l(x, y)$. Для цього відстань між площинами 1 і 2, яка дорівнює максимальній товщині лінзи d_0 на оптичній осі, можна подати у вигляді

$$d_0 = d(x, y) + [d_0 - d(x, y)], \quad (3.3)$$

де $[d_0 - d(x, y)]$ – товщина повітряного простору між поверхнями лінзи й площинами 1 та 2.

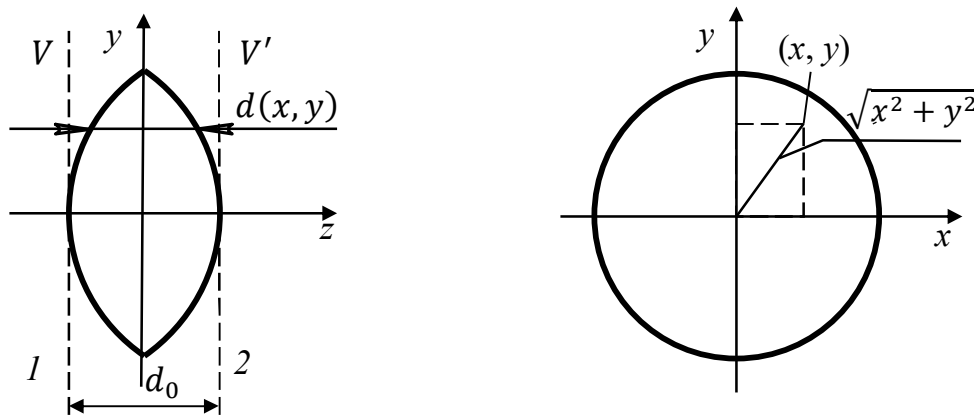


Рис. 3.1. Тонка сферична лінза

Тоді фазове зміщення з урахуванням (3.3) подамо у вигляді

$$\varphi_l(x, y) = knd(x, y) + k[d_0 - d(x, y)], \quad (3.4)$$

де k – хвильове число, $k = 2\pi/\lambda$; n – показник заломлення лінзи.

Підставимо рівняння (3.4) у вираз (3.2). Тоді амплітудний коефіцієнт пропускання лінзи знайдемо за формулою

$$t_l(x, y) = \exp(jkd_0) \exp[jk(n - 1)d(x, y)]. \quad (3.5)$$

Визначимо функцію товщини лінзи $d(x, y)$ залежно від основних параметрів лінзи. Подамо лінзу у вигляді двох частин (рис. 3.2), для яких

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y); \quad d_0 = d_{10} + d_{20}. \quad (3.6)$$

Із рис. 3.2 знаходимо, що

$$d_1(x, y) = d_{01} - \left[r_1 - \sqrt{r_1^2 - (x^2 + y^2)} \right] = d_{01} - r_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}} \right]; \quad (3.7)$$

$$d_2(x, y) = d_{02} - \left[-r_2 + \sqrt{r_2^2 - (x^2 + y^2)} \right] = d_{02} + r_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_2^2}} \right]. \quad (3.8)$$

Підставимо формули (3.7) і (3.8) у вираз (3.6):

$$d(x, y) = d_0 - r_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}} \right] + r_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_2^2}} \right]. \quad (3.9)$$

Щоб спростити математичні перетворення, розглянемо параксіальну область поблизу оптичної осі, для якої

$$\frac{x^2 + y^2}{r_1^2} \ll 1; \quad \frac{x^2 + y^2}{r_2^2} \ll 1. \quad (3.10)$$

Тоді

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r_1^2}; \quad \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_2^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r_2^2}. \quad (3.11)$$

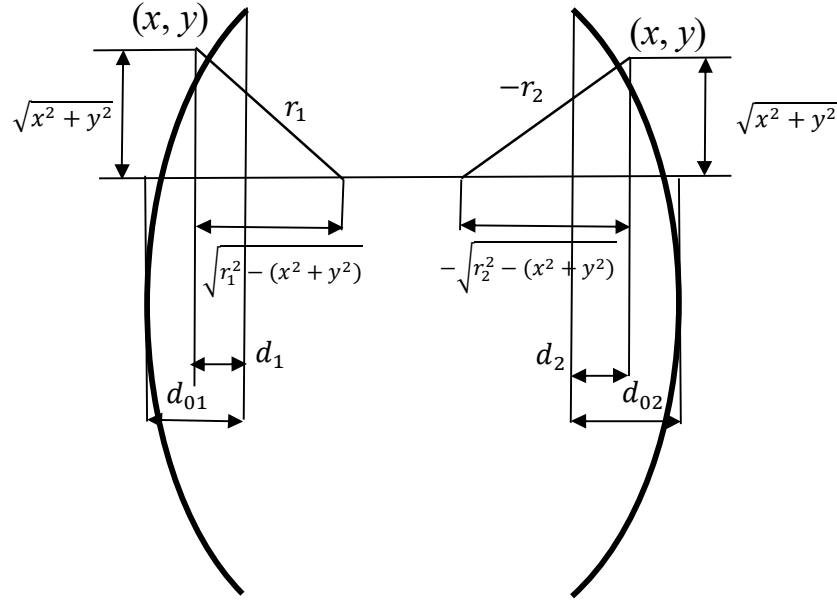


Рис. 3.2. До визначення функції товщини лінзи $d(x, y)$

Підставимо співвідношення (3.11) у вираз (3.9). Тоді функція товщини лінзи $d(x, y)$ матиме вигляд

$$d(x, y) = d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (3.12)$$

Слід звернути увагу на те, що параксіальне наближення рівняння (3.11) дає приблизно такий самий результат, як і у разі зміни сферичних поверхонь лінзи на параболічні.

Підставивши рівняння (3.12) у вираз (3.5), отримаємо параксіальне наближення амплітудного коефіцієнта пропускання лінзи:

$$t_l(x, y) = \exp(jknd_0) \exp \left[-jk(n-1) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Множник $\exp(jknd_0)$ у формулі (3.13) вносить сталу фазову затримку, тому його можна не враховувати.

Параметри лінзи об'єднаємо у вигляді

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (3.14)$$

де f – фокусна відстань лінзи, яку в геометричній оптиці також знаходять за формулою (3.14).

Отже, фазові перетворення, що виконує додатна лінза, можна подати у вигляді

$$t_l(x, y) = \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (3.15)$$

Щоб краще розуміти фізичний зміст фазового перетворення (3.15), яке виконує сферична лінза, розглянемо дію лінзи на нормально падаючу плоску хвилю з амплітудою V_0 . Використовуючи вираз (3.1) і перетворення (3.15), знаходимо комплексну амплітуду поля за лінзою:

$$V'(x, y) = V_0 \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (3.16)$$

Розглянемо рівняння сферичної хвилі, що сходиться, (1.23) у параксіальному наближенні, тобто у випадку, коли виконується умова (2.54), тоді рівняння (1.23) матиме вигляд

$$V(x, y, z) = \frac{V(0)}{r} \exp(-jkr) = \frac{V(0)}{r} \exp \left\{ -jkz \left[1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z^2} \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Визначаємо рівняння сферичної хвилі у точці, розміщеній на відстані $z = f$, після чого вираз (3.17) набуде вигляду

$$V(x, y, f) = \frac{V(0)}{r} \exp(-jkz) \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (3.18)$$

Порівнюючи вирази (3.16) і (3.18) бачимо, що тонка додатна сферична лінза перетворює плоску хвилю у сферичну, яка збігається у фокусі лінзи (рис. 3.3, а). Якщо фокусна відстань від'ємна (від'ємна лінза), то сферична хвиля розходить з точки на осі лінзи, розміщеній на відстані f перед лінзою (рис. 3.3, б).

Отже, твердження про те, що сферична лінза перетворює падаючу плоску хвилю у сферичну, справедливе лише у параксіальному наближенні. Якщо умова (3.10) не виконується, то, навіть якщо сферичні поверхні лінз бездоганні, фронт хвилі на виході матиме відхилення від ідеальної сферичності, які називають *абераціями*.

Але на практиці фазове перетворення (3.15) має більш загальний характер, ніж можна чекати за умов параксіального наближення. Аналіз багатьох високоякісних оптичних систем (об'єктивів), виконаний на основі геометричної оптики, показує, що для них з достатньою мірою точності справедлива функція (3.15).

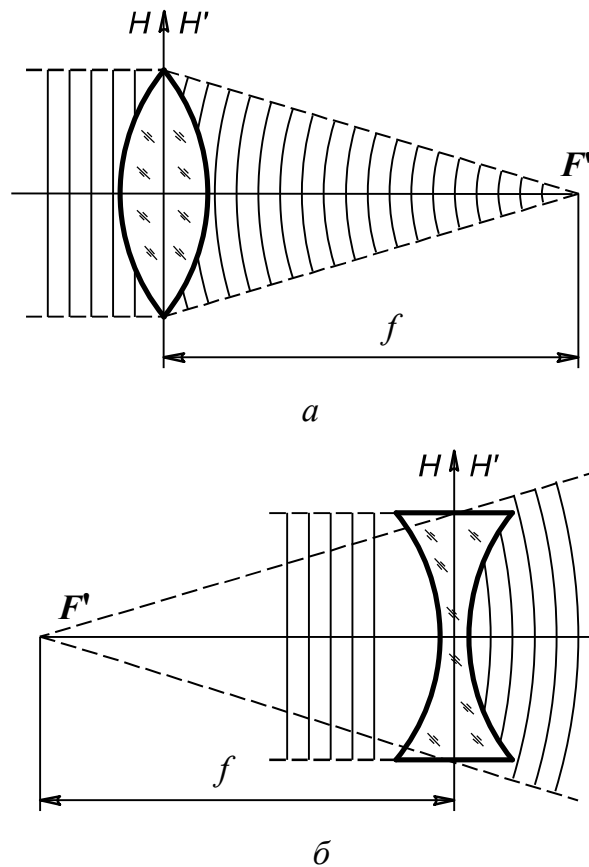


Рис. 3.3. Дія додатної лінзи (а) і від'ємної лінзи (б) на нормальну падаючу плоску хвилю

3.2. Лінза як елемент, що виконує перетворення Фур'є

Однією з основних і важливих властивостей тонкої додатної лінзи є її здатність виконувати двовимірне перетворення Фур'є. В електронних системах для здійснення перетворення Фур'є використовують складні дорогі спектроаналізатори або комп'ютери. Водночас складна операція перетворення Фур'є у когерентній оптичній системі виконується дуже просто за рахунок явища дифракції світла з урахуванням фазового перетворення тонкої лінзи. При цьому двовимірний сигнал являє собою тонкий транспарант, який характеризується амплітудним коефіцієнтом пропускання.

3.2.1. Поширення монохроматичного випромінювання через оптичну систему

Розглянемо процес проходження когерентного випромінювання через оптичну систему з чотирма площинами, в яких розміщені: 1– джерело випромінювання; 2– вхідний транспарант; 3 – додатна тонка лінза; 4 – площина спостереження (екран) (рис. 3.4).

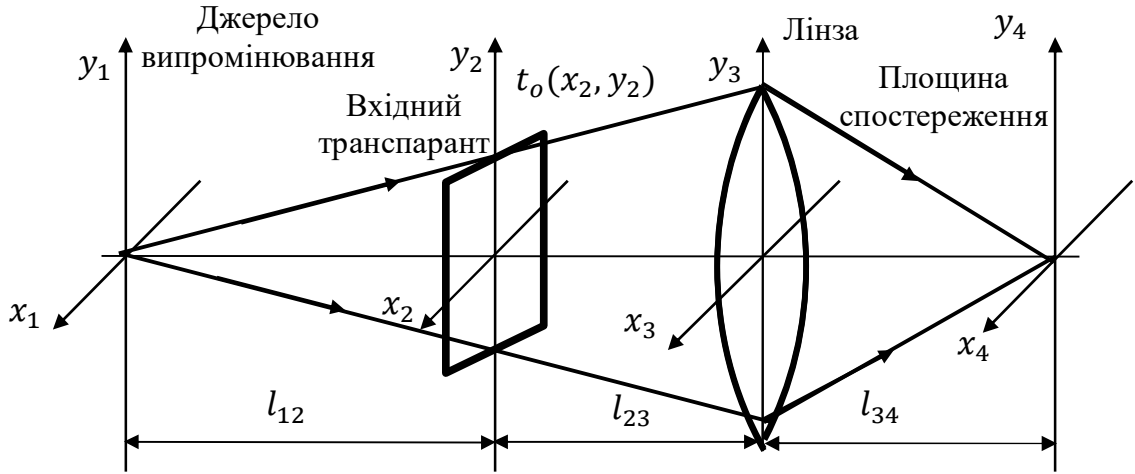


Рис. 3.4. Поширення когерентного випромінювання в оптичній системі із вхідним транспарантом, встановленим перед об'єктивом

Нехай у площині x_1y_1 розміщене в центрі системи координат $x_1 = y_1 = 0$ (на оптичній осі системи) точкове джерело випромінювання з амплітудою V_0 і довжиною хвилі λ . Тоді амплітуду світлового поля в цій площині описують виразом

$$V(x_1, y_1) = V_0 \delta(x_1, y_1). \quad (3.19)$$

Вважатимемо, що на шляху поширення випромінювання між чотирма площинами спостерігається дифракція Френеля, рівняння якої для розглядуваної оптичної системи можна записати на основі співвідношення (2.56) у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_{i+1}, y_{i+1}) &= \frac{\exp(jkl_{i,i+1})}{j\lambda l_{i,i+1}} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} V'(x_i, y_i) \exp\left\{j \frac{k}{2l_{i,i+1}} [(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2]\right\} dx_i dy_i = \\ &= \Phi_{i,i+1}\{V'(x_i, y_i)\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

де $\Phi_{i,i+1}\{\}$ – оператор Френеля, який описує явище дифракції під час поширення випромінювання між i -ю та $(i + 1)$ -ю площинами, відстань між якими $l_{i,i+1}$; $V'(x_i, y_i)$ – розподіл поля безпосередньо за i -ю площиною; $i = 1, 2, 3$.

Використовуючи оператор (3.20), знаходимо амплітуду поля, яке освітлює транспарант у площині x_2y_2 . Підставимо функцію (2.19) в оператор (3.20):

$$V(x_2, y_2) = \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} V_0 \delta(x_1, y_1) \exp\left\{j \frac{k}{2l_{12}} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]\right\} dx_1 dy_1. \quad (3.21)$$

Розподіл поля за транспарантом з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_2, y_2)$ визначають з урахуванням співвідношення (3.21) як

$$V'(x_2, y_2) = V(x_2, y_2) t_o(x_2, y_2) = \\ = \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} V_0 t_o(x_2, y_2) \exp\left[j \frac{k}{2l_{12}} (x_2^2 + y_2^2)\right]. \quad (3.22)$$

Використовуючи оператор (3.20) до ділянки між площинами 2 та 3 і враховуючи (3.22), визначимо розподіл поля у площині перед тонкою лінзою:

$$V(x_3, y_3) = \Phi_{23}\{V'(x_2, y_2)\} = V_0 \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} \frac{\exp(jkl_{23})}{j\lambda l_{23}} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp\left[\frac{k}{2l_{12}} (x_2^2 + y_2^2)\right] \exp\left\{j \frac{k}{2l_{23}} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]\right\} dx_2 dy_2. \quad (3.24)$$

Розподіл поля за лінзою обчислимо згідно з перетворенням (3.15):

$$V'(x_3, y_3) = V(x_3, y_3) t_l(x_3, y_3) = V(x_3, y_3) \exp\left[-j \frac{k}{2f} (x_3^2 + y_3^2)\right]. \quad (3.24)$$

Використовуючи знову оператор Френеля (3.20) і враховуючи вираз (3.24), аналізуючи поширення світла між площинами 3 і 4, визначимо розподіл поля у площині $x_4 y_4$:

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} \frac{\exp(jkl_{23})}{j\lambda l_{23}} \frac{\exp(jkl_{34})}{j\lambda l_{34}} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} V(x_3, y_3) \exp\left[-j \frac{k}{2f} (x_3^2 + y_3^2)\right] \exp\left\{j \frac{k}{2l_{34}} [(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2]\right\} dx_3 dy_3. \quad (3.25)$$

Підставивши вираз (3.23) у (3.25), отримаємо загальний вираз для обчислення амплітуди поля у площині $x_4 y_4$:

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} \frac{\exp(jkl_{23})}{j\lambda l_{23}} \frac{\exp(jkl_{34})}{j\lambda l_{34}} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp\left[j \frac{k}{2l_{12}} (x_2^2 + y_2^2)\right] \exp\left\{j \frac{k}{2l_{23}} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]\right\} \times \\ \times \exp\left[-j \frac{k}{2f} (x_3^2 + y_3^2)\right] \exp\left\{j \frac{k}{2l_{34}} [(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2]\right\} dx_2 dy_2 dx_3 dy_3. \quad (3.26)$$

Групуючи у підінтегральному виразі (3.26) експоненціальні співмножники з однаковими змінними, а також використовуючи табличний інтеграл 2.3.15.11 з довідника [4],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-px^2 - qx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right), \quad (3.27)$$

матимемо:

$$\begin{aligned}
 V(x_4, y_4) = & V_0 \frac{\exp[jk(l_{12}+l_{23}+l_{34})]}{j\lambda^3 l_{12} l_{23} l_{34}} \frac{2\pi}{jk\left(\frac{1}{l_{12}}+\frac{1}{l_{23}}-\frac{1}{l_{34}}\right)} \times \\
 & \times \exp\left\{jk\left[\frac{1}{2l_{34}} - \frac{1}{2l_{34}\left(\frac{1}{l_{23}}+\frac{1}{l_{34}}-\frac{1}{f}\right)}\right](x_4^2 + y_4^2)\right\} \times \\
 & \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp\left\{\frac{jk}{2}\left[\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{23}}+\frac{1}{l_{34}}-\frac{1}{f}\right)}\right](x_2^2 + y_2^2)\right\} \times \\
 & \times \exp\left[-j2\pi\frac{1}{\lambda l_{23} l_{34}\left(\frac{1}{l_{23}}+\frac{1}{l_{34}}-\frac{1}{f}\right)}(x_2 x_4 + y_2 y_4)\right] dx_2 dy_2. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Отриманий вираз (3.28) описує розподіл світлового поля у площині $x_4 y_4$ за умови довільного взаємного розміщення всіх чотирьох площин оптичної системи (див. рис. 3.4).

3.2.2. Розподіл світлового поля у площині аналізу, коли транспарант встановлено перед лінзою

Розглянемо перетворення Фур'є двовимірної функції амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта $t_o(x_2, y_2)$:

$$T_o(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp[-j2\pi(v_x x_2 + v_y y_2)] dx_2 dy_2. \quad (3.29)$$

Змінюючи параметри оптичної системи (відстань $l_{i,i+1}$), спробуємо наблизити вираз (3.28) до перетворення Фур'є (3.29). Оберемо параметри оптичної системи так, щоб підінтегральний експоненціальний квадратичний множник у виразі (3.28) дорівнював одиниці, тобто

$$\exp\left\{\frac{jk}{2}\left[\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{23}}+\frac{1}{l_{34}}-\frac{1}{f}\right)}\right](x_2^2 + y_2^2)\right\} = 1. \quad (3.30)$$

Із рівняння (3.30) маємо

$$\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{23}}+\frac{1}{l_{34}}-\frac{1}{f}\right)} = 0. \quad (3.31)$$

Розв'язуючи рівняння (3.31) відносно l_{34} знаходимо, що

$$l_{34} = \frac{f(l_{12}+l_{23})}{(l_{12}+l_{23})-f}. \quad (3.32)$$

Вираз (3.28) дає змогу підібрати таке поєднання геометричних параметрів оптичної системи, за яких вказаний фазовий множник (3.30) усувається.

Позначимо через $l_{13} = l_{12} + l_{23}$ відстань між джерелом випромінювання і лінзою. Тоді співвідношення (3.32) набуває вигляду

$$\frac{1}{l_{13}} + \frac{1}{l_{34}} = \frac{1}{f}. \quad (3.33)$$

Вираз (3.33) є відомою *формулою лінзи* із геометричної оптики.

Отже, якщо для оптичної системи, зображеної на рис. 3.4, справедлива формула лінзи (3.33), то у разі довільного розміщення вхідного транспаранта розподіл поля у площині $x_4 y_4$ має вигляд

$$V(x_4, y_4) = C \exp \left\{ jk \left[\frac{1}{2l_{34}} - \frac{1}{2l_{34} \left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f} \right)} \right] (x_4^2 + y_4^2) \right\} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \times \exp \left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{23} l_{34} \left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f} \right)} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2, \quad (3.34)$$

де C – комплексна стала, яка не впливає на розподіл поля у площині $x_4 y_4$,

$$C = V_0 \frac{\exp[jk(l_{12} + l_{23} + l_{34})]}{j\lambda^3 l_{12} l_{23} l_{34}} \frac{2\pi}{jk \left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} \right)}.$$

Нехай транспарант $t_o(x_2, y_2)$ освітлюється плоскою монохроматичною хвилею з амплітудою V_p . Це означає, що джерело випромінювання перебуває в нескінченності, $l_{12} = \infty$, а площа спостереження $x_4 y_4$ розміщена у задній фокальній площині лінзи, тобто $l_{34} = f$. При цьому амплітуду плоскої хвилі визначають як

$$V_p = V_0 \frac{\exp[jk(l_{12} + l_{23} + l_{34})]}{j\lambda l_{12}}.$$

Розглянемо два окремі випадки рівняння (3.34), коли:

1. *Транспарант встановлено безпосередньо перед лінзою* (рис. 3.5, а), $l_{23} = 0$, а розподіл амплітуди поля у площині спостереження можна описати виразом

$$V(x_4, y_4) = \frac{V_p}{j\lambda f} \exp \left[j \frac{k}{2f} (x_4^2 + y_4^2) \right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2. \quad (3.35)$$

2. *Транспарант встановлено у передній фокальній площині лінзи* (рис. 3.5, б), $l_{23} = f$, а розподіл амплітуди поля у площині спостереження можна описати виразом

$$V(x_4, y_4) = \frac{V_p}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2. \quad (3.36)$$

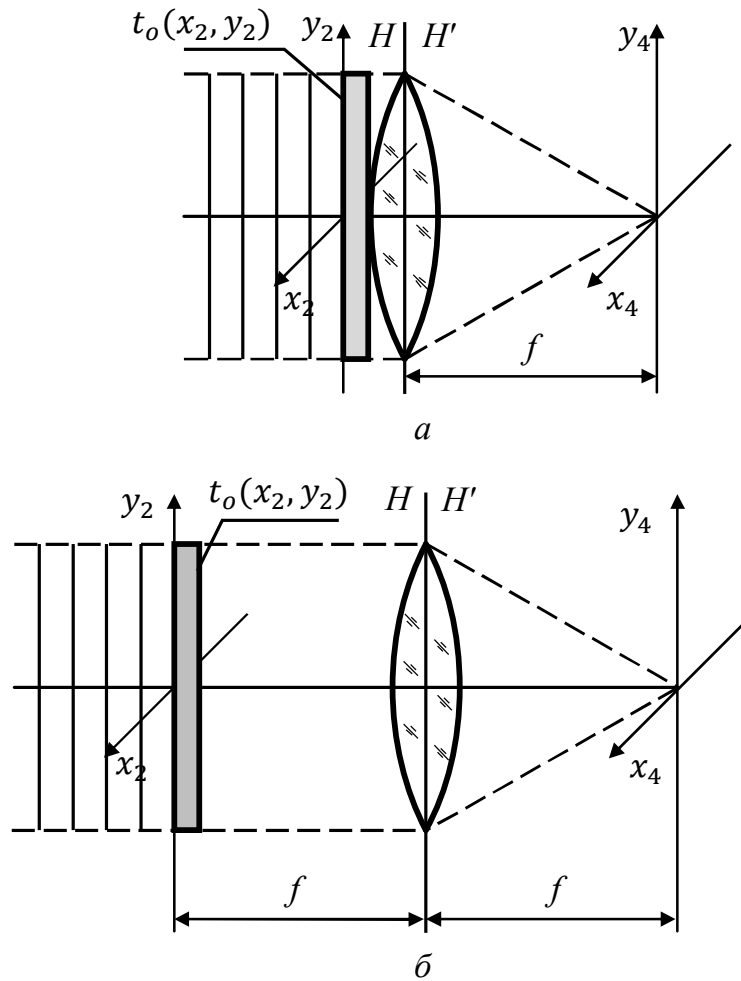


Рис. 3.5. Оптичні схеми когерентних спектроаналізаторів, коли положення транспаранта: а – безпосередньо перед лінзою; б – у передній фокальній площині лінзи

Із порівняння виразів (3.35) і (3.36) з перетворенням Фур'є (3.29) випливає такий важливий висновок: якщо транспарант встановлено у передній фокальній площині лінзи, то фазової похибки, зумовленої експоненціальним множником, що стоїть перед інтегралом у виразі (3.35), не буде. При цьому комплексна амплітуда світлового поля у задній фокальній площині лінзи з точністю до постійного множника $V_p/j\lambda f$ являє собою просторовий спектр від амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта з просторовими частотами:

$$v_x = \frac{x_4}{\lambda f}; v_y = \frac{y_4}{\lambda f}. \quad (3.37)$$

Отримана формула (3.36) не враховує кінцевих розмірів лінзи, які характеризуються функцією зіниці:

$$P(x_3, y_3) = \begin{cases} 1, & \text{всередині апертури;} \\ 0, & \text{за межами апертури.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Врахуємо функцію (3.38) у виразі (3.36). У формуванні поля у площині спостереження в точці (x_4, y_4) бере участь тільки частина транспаранта, обмежена проекцією апертури лінзи на транспарант (рис. 3.6). Із рис. 3.6 знаходимо координати центра цієї проекції: $x_2 = -x_4$ та $y_2 = -y_4$. При цьому ефективний коефіцієнт пропускання транспаранта

$$t_{ef}(x_2, y_2) = t_o(x_2, y_2)P(x_2 + x_4, y_2 + y_4), \quad (3.39)$$

де $P(x_2 + x_4, y_2 + y_4)$ – функція зіниці (3.38), що проектується на транспарант (площину $x_2 y_2$).

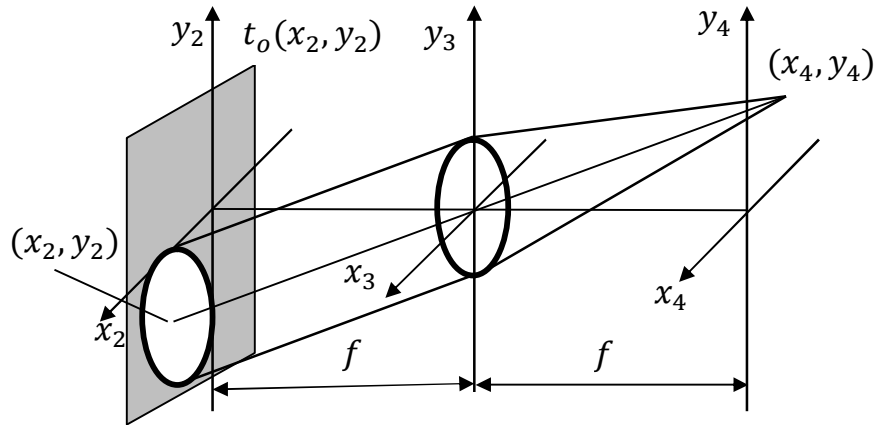


Рис. 3.6. Вплив він'єтування лінзи

Отже, апертурна діафрагма тонкої лінзи обмежує ефективний розмір транспаранта, при цьому амплітудний коефіцієнт пропускання тієї частини транспаранта, яка визначає поле у фіксованій точці (x_4, y_4) , залежить від координат.

Враховуючи функцію (3.39), розподіл поля (3.36) запишемо у вигляді

$$V(x_4, y_4) = \frac{V_p}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) P(x_2 + x_4, y_2 + y_4) \times \\ \times \exp \left[-j \frac{2\pi}{j\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2. \quad (3.40)$$

З виразу (3.40) видно, що з віддаленням транспаранта від лінзи з'являється він'єтування в оптичній системі.

3.2.3. Розподіл світлового поля у площині аналізу, коли транспарант встановлено за лінзою

Розглянемо процес проходження монохроматичного випромінювання через оптичну систему із вхідним транспарантом, встановленим за лінзою (рис. 3.7).

Виконавши дослідження з поширення випромінювання між окремими елементами оптичної системи, аналогічні дослідженням для схеми, зображеної на рис. 3.4, можна побачити, що амплітуду поля у площині $x_4 y_4$ описують виразом

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{\exp[jk(l_{12}+l_{23}+l_{34})]}{j\lambda^3 l_{12} l_{23} l_{34}} \frac{2\pi}{jk\left(\frac{1}{l_{12}}+\frac{1}{l_{23}}-\frac{1}{l_{34}}\right)} \exp\left[-j\frac{k}{2l_{34}}(x_4^2 + y_4^2)\right] \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_3, y_3) \exp\left\{\frac{jk}{2}\left[\left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}}+\frac{1}{l_{23}}-\frac{1}{f}\right)}\right](x_3^2 + y_3^2)\right\} \times$$

$$\times \exp\left[-j2\pi\frac{1}{\lambda l_{34}}(x_3 x_4 + y_3 y_4)\right] dx_3 dy_3. \quad (3.41)$$

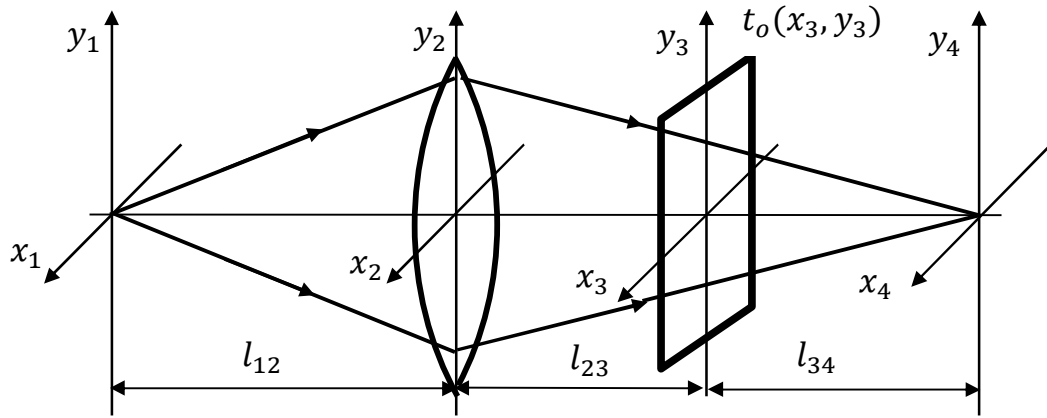


Рис. 3.7. Поширення монохроматичного випромінювання в оптичній системі з вхідним транспарантом, встановленим за лінзою

Вираз (3.41) містить ряд експоненціальних співмножників. Оберемо параметри оптичної схеми так, щоб підінтегральний експоненціальний квадратичний множник дорівнював одиниці, тобто

$$\exp\left\{\frac{jk}{2}\left[\left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}}+\frac{1}{l_{23}}-\frac{1}{f}\right)}\right](x_3^2 + y_3^2)\right\} = 1, \quad (3.42)$$

звідси

$$\left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}}+\frac{1}{l_{23}}-\frac{1}{f}\right)} = 0. \quad (3.43)$$

Співвідношення (3.43) можна подати у вигляді

$$\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}+l_{34}} = \frac{1}{f}, \quad (3.44)$$

що являє собою формулу лінзи.

Отже, якщо виконується умова (3.44), то з точністю до фазового множника, що стоїть перед інтегралом у виразі (3.41), розподіл поля у

площині спостереження x_4y_4 являє собою просторовий спектр коефіцієнта пропускання $t_o(x_3, y_3)$ транспаранта з просторовими частотами:

$$v_x = \frac{x_4}{\lambda l_{34}}; \quad v_y = \frac{y_4}{\lambda l_{34}}. \quad (3.45)$$

Нехай лінза освітлюється плоскою монохроматичною хвилею з амплітудою V_p . При цьому $l_{23} + l_{34} = f$, а $V_p = V_0 \exp[jk(l_{12} + l_{23} + l_{34})]/j\lambda l_{12}$. Тоді вираз (3.41) з урахуванням (3.42) набуває вигляду

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{f}{j\lambda l_{34}^2} \exp\left[-j \frac{k}{2l_{34}} (x_4^2 + y_4^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_3, y_3) \exp\left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{34}} (x_3 x_4 + y_3 y_4)\right] dx_3 dy_3. \quad (3.46)$$

Обмежений розмір освітленої ділянки на транспаранті можна врахувати, якщо використовувати ефективну функцію значка, проведену до площини транспаранта x_3y_3 . З рис. 3.7 знаходимо, що

$$\frac{x_2}{f} = \frac{x_3}{l_{34}}, \quad \frac{y_2}{f} = \frac{y_3}{l_{34}}, \quad \text{або} \quad x_2 = \frac{f}{l_{34}} x_3; \quad y_2 = \frac{f}{l_{34}} y_3,$$

звідси

$$P_{ef}(x_3, y_3) = P\left(\frac{f}{l_{34}} x_3, \frac{f}{l_{34}} y_3\right). \quad (3.47)$$

Підставивши функцію зіниці (3.47) у (3.39), а потім у вираз (3.46), отримаємо:

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{f}{j\lambda l_{34}^2} \exp\left[-j \frac{k}{2l_{34}} (x_4^2 + y_4^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_3, y_3) P\left(\frac{f}{l_{34}} x_3, \frac{f}{l_{34}} y_3\right) \exp\left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{34}} (x_3 x_4 + y_3 y_4)\right] dx_3 dy_3. \quad (3.48)$$

Розподіл поля $V(x_4, y_4)$ у площині спостереження (3.48) являє собою з точністю до фазового множника перетворення Фур'є від амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта з урахуванням функції зіниці лінзи для просторових частот (3.45):

$$v_x = \frac{x_4}{\lambda l_{34}}; \quad v_y = \frac{y_4}{\lambda l_{34}}. \quad (3.49)$$

Вираз (3.48) фактично збігається з формулою (3.35), отриманою для випадку, коли транспарант встановлено впритул до лінзи (за $l_{34} = f$). Однак встановлення транспаранта за лінзою (рис. 3.7) дає можливість змінювати масштаб просторового спектру. Зі збільшенням l_{34} просторовий масштаб спектру збільшується доти, поки транспарант не опиниться поблизу лінзи. Зі зменшенням l_{34} масштаб спектру зменшується.

3.3. Дифракційна теорія формування зображення тонкою додатною лінзою

Розглянемо на основі скалярної теорії дифракції процес формування дійсного зображення тонкою додатною лінзою. Вважатимемо, що лінза не має аберацій, а предмет освітлюється монохроматичним джерелом випромінювання.

3.3.1. Функція розсіювання тонкої додатної лінзи

Нехай об'єкт з розподілом амплітуди поля $V_o(x_o, y_o)$ розміщений у площині $x_o y_o$, яка перебуває на відстані мінус a від площини, де встановлено тонку додатну лінзу (рис. 3.8). Лінза перебуває у площині xu , а зображення – у площині $x_i y_i$.

Визначимо розподіл поля $V_i(x_i, y_i)$ у площині $x_i y_i$, яка перебуває на довільній відстані a' за лінзою. Через лінійність явища розподілу світлової хвилі функцію $V_i(x_i, y_i)$ на виході оптичної схеми можна подати у вигляді інтеграла суперпозиції:

$$V_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i, y_i; x_o, y_o) V_o(x_o, y_o) dx_o dy_o. \quad (3.50)$$

Інтеграл (3.50) справедливий для когерентного світла. Функція $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$ являє собою амплітуду поля в точці (x_i, y_i) , створену точковим джерелом, яке перебуває у площині предметів у точці (x_o, y_o) , тому її називають *функцією розсіювання* або *імпульсним відгуком* оптичної системи. Для випадку, що розглядається, вона являє собою дифракційне зображення точкового джерела.

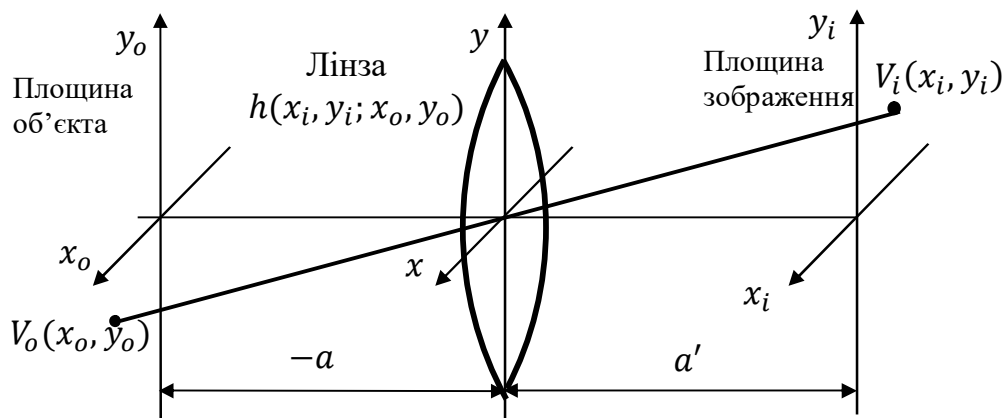


Рис.3.8. Схема формування зображення тонкою додатною лінзою

Визначимо вид функції розсіювання $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$. Для цього помістимо в довільну точку (x'_o, y'_o) предметної площини точкове джерело випромінювання одиничної амплітуди, яке математично можна описати за допомогою дельта-функції:

$$V_o(x_o, y_o) = \delta(x'_o - x_o, y'_o - y_o). \quad (3.51)$$

Для функції (3.51) в наближенні дифракції Френеля (3.20) амплітуду поля у площині перед лінзою описують як

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{-1}{j\lambda a} \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x'_o - x_o, y'_o - y_o) \exp \left\{ -j \frac{k}{2a} [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2] \right\} dx_o dy_o = \\ &= \frac{-1}{j\lambda a} \exp \left\{ -j \frac{k}{2a} [(x - x'_o)^2 + (y - y'_o)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (3.52a)$$

У виразі (3.52a) не враховано сталий фазовий множник $\exp(-jka)$, який не впливає на розподіл поля $V(x, y)$.

Після проходження випромінювання через лінзу обмежених розмірів розподіл поля у площині за лінзою з урахуванням перетворення (3.15) вираз (3.52a) набуває вигляду

$$\begin{aligned} V'(x, y) &= V(x, y) t_l(x, y) = \frac{-1}{j\lambda a} P(x, y) \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -j \frac{k}{2a} [(x - x'_o)^2 + (y - y'_o)^2] \right\} = \frac{-1}{j\lambda a} P(x, y) \times \\ &\times \exp \left[-j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a} \right) (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-j \frac{k}{2a} (x_o'^2 + y_o'^2) \right] \times \\ &\times \exp \left[-j \frac{k}{a} (x'_o x + y'_o y) \right], \end{aligned} \quad (3.52b)$$

де $P(x, y)$ – функція зіниці лінзи, що визначається співвідношенням (3.38).

Знову вважатимемо, що для поширення випромінювання від лінзи до довільної площини спостереження $x_i y_i$ справедлива дифракція Френеля (3.20). Тоді амплітуду у дифракційному зображенні точкового джерела описують виразом

$$\begin{aligned} V(x_i, y_i) &= h(x'_o, y'_o; x_i, y_i) = \\ &= \frac{1}{j\lambda a'} \iint_{-\infty}^{\infty} V'(x, y) \exp \left\{ j \frac{k}{2a'} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (3.53)$$

де знову не враховано сталий фазовий множник $\exp(jka')$.

Підставляючи амплітуду поля (3.52b) у вираз (3.53), отримаємо:

$$\begin{aligned} h(x'_o, y'_o; x_i, y_i) &= \frac{1}{\lambda^2 a a'} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left[-j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a} \right) (x^2 + y^2) \right] \times \\ &\times \exp \left[-j \frac{k}{2a} (x_o'^2 + y_o'^2) \right] \exp \left[-j \frac{k}{a} (x'_o x + y'_o y) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[j \frac{k}{2a'} (x_i^2 + y_i^2) \right] \exp \left[j \frac{k}{2a'} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-j \frac{k}{a'} (x_i x + y_i y) \right] dx dy = \\
& = \frac{1}{\lambda^2 a a'} \exp \left[-j \frac{k}{2a} (x_o'^2 + y_o'^2) \right] \exp \left[j \frac{k}{2a'} (x_i^2 + y_i^2) \right] \times \\
& \times \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left[j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right) (x^2 + y^2) \right] \times \\
& \times \exp \left\{ -jk \left[\left(\frac{x_i}{a'} - \frac{x_o'}{a} \right) x + \left(\frac{y_i}{a'} - \frac{y_o'}{a} \right) y \right] \right\} dx dy. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Оскільки точку (x_o', y_o') , де розміщене точкове джерело випромінювання, вибирали довільно, у виразі (3.54) для функції розсіювання замість x_o', y_o' можна записати x_o, y_o . Отриманий вираз (3.54) є дифракційним зображенням точки у площині $x_i y_i$, яка перебуває на довільній відстані a' від лінзи. Підставляючи функцію $h(x_o', y_o'; x_i, y_i)$ в інтеграл суперпозиції (3.50), можна знайти розподіл поля у довільній площині $x_i y_i$, який формується об'єктом з амплітудою поля $V_o(x_o, y_o)$.

3.3.2. Функція розсіювання додатної лінзи у площині геометричного зображення

Виберемо відстані a та a' (див. рис. 3.8) таким чином, щоб перша експонента під інтегралом у виразі (3.54) дорівнювала одиниці. Це можливо, якщо виконується умова

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} - \frac{1}{f} = 0, \text{ або } \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f}. \quad (3.55)$$

Співвідношення (3.55) являє собою відому формулу відрізків для ідеальної оптичної системи.

Дві експоненти, що стоять перед інтегралом у виразі (3.54), вносять фазове спотворення у вигляді сферичних хвиль. Тому, якщо поверхні предмета і зображення сферичні, ці множники зникають. Здебільшого приймачі випромінювання реєструють інтенсивність світла, тобто зазначені вище експоненти можна не враховувати, оскільки вони вносять тільки фазові спотворення. Тоді, з урахуванням співвідношення (3.55), функція розсіювання матиме вигляд

$$h(x_o, y_o; x_i, y_i) = \frac{1}{\lambda^2 a a'} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left\{ -jk \left[\left(\frac{x_i}{a'} - \frac{x_o}{a} \right) x + \left(\frac{y_i}{a'} - \frac{y_o}{a} \right) y \right] \right\} dx dy. \quad (3.56)$$

Введемо поняття поперечного збільшення оптичної системи:

$$\beta = \frac{x_i}{x_o} = \frac{y_i}{y_o} = \frac{a'}{a}. \quad (3.57)$$

З урахуванням збільшення (3.57) функція (3.56) матиме вигляд

$$h(x_o, y_o; x_i, y_i) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 a a'} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda a'} [(x_i - \beta x_o)x + (y_i - \beta y_o)y] \right\} dx dy. \quad (3.58)$$

Оскільки функція розсіювання точки (ФРТ) лінзи залежить від різниці координат, тобто

$$h(x_o, y_o; x_i, y_i) = h(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o), \quad (3.59)$$

лінзу можна розглядати як просторово-інваріантну систему, а інтеграл суперпозиції (3.50) перетворюється в інтеграл згортки.

Порівнюючи вираз (3.58) з формулою дифракції Фраунгофера (2.65), можна помітити, що ФРТ додатної лінзи відповідає дифракції Фраунгофера на зіниці лінзи. При цьому для фіксованої предметної точки $P(x_o, y_o)$ центр дифракційної картини перебуває у точці ідеального зображення $P'(x_{io} = \beta x_o, y_{io} = \beta y_o)$.

Зробимо заміну змінних у функції (3.58):

$$v_x = \frac{x}{\lambda a'}, \quad v_y = \frac{y}{\lambda a'}, \quad (3.60)$$

Із співвідношення (3.60) маємо:

$$x = \lambda a' v_x, \quad y = \lambda a' v_y. \quad (3.61)$$

Тоді функція (3.58) набуває вигляду

$$\begin{aligned} h(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o) &= \frac{\lambda^2 a'^2}{\lambda^2 a a'} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) \exp \{ -j 2\pi [(x_i - \beta x_o)v_x + (y_i - \beta y_o)v_y] \} dv_x dv_y = \\ &= \beta \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) \exp \{ -j 2\pi [(x_i - \beta x_o)v_x + (y_i - \beta y_o)v_y] \} dv_x dv_y. \end{aligned} \quad (3.62)$$

З виразу (3.62) знаходимо, що

$$h(x_i, y_i) = \beta \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) \exp [-j 2\pi (x_i v_x + y_i v_y)] dv_x dv_y. \quad (3.63)$$

Отже, функція розсіювання точки додатної лінзи $h(x_i, y_i)$ (3.63) з точністю до сталого множника β являє собою перетворення Фур'є від функції зіниці $P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y)$.

3.3.3. Зв'язок між амплітудами поля у площині зображення і площині предмета

Розподіл амплітуди поля $V_i(x_i, y_i)$ у площині зображення можна отримати, якщо в інтеграл суперпозиції (3.50) підставити вираз для функції розсіювання точки лінзи (3.62).

Розглянемо випадок наближення геометричної оптики, коли $\lambda \rightarrow 0$. Позначимо функцію розсіювання точки лінзи як $h_g = \lim_{\lambda \rightarrow 0} h$.

Знайдемо область існування функції зінці $P(\lambda a'v_x, \lambda a'v_y)$, яка визначається виразом (3.38):

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_l; \\ 0, \text{ коли } \sqrt{x^2 + y^2} > R_l. \end{cases} \quad (3.64a)$$

З врахуванням змінних (3.61) запишемо функцію (3.64a) у вигляді

$$P(\lambda a'v_x, \lambda a'v_y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \leq \frac{R_l}{\lambda a'}; \\ 0, \text{ коли } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} > \frac{R_l}{\lambda a'}. \end{cases} \quad (3.64b)$$

Якщо $\lambda \rightarrow 0$, то $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow \infty$. Це означає, що у виразі (3.62) $P(\lambda a'v_x, \lambda a'v_y) = 1$. Тоді для функції (3.64b) маємо

$$\begin{aligned} h_g(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o) &= \\ &= \beta \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j2\pi[(x_i - \beta x_o)v_x + (y_i - \beta y_o)v_y]\} dv_x dv_y = \\ &= \beta \delta(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Отже, функція розсіювання точки (імпульсний відгук) лінзи (3.65) у наближенні геометричної оптики (для ідеальної оптичної системи) являє собою дельта-функцію.

Підставимо функцію (3.65) в інтеграл суперпозиції (3.50) і скористаємося властивостями дельта-функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0); \delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x). \quad (3.66)$$

Тоді розподіл поля $V_{ig}(x_i, y_i)$ у наближенні геометричної оптики з урахуванням співвідношення (3.66) матиме вигляд

$$V_{ig}(x_i, y_i) = \frac{1}{\beta} \iint_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x_i}{\beta} - x_o, \frac{y_i}{\beta} - y_o\right) V_o(x_o, y_o) dx_o dy_o = \frac{1}{\beta} V_o\left(\frac{x_i}{\beta}, \frac{y_i}{\beta}\right). \quad (3.67)$$

Зі співвідношення (3.67) випливає, що зображення предмета в наближенні геометричної оптики являє собою збільшену і перевернену ($\beta < 0$) точну копію предмета. Множник $1/\beta$ виражає закон збереження енергії у разі зміни масштабу зображення.

Якщо врахувати дифракційні ефекти, що виникають під час поширення світлового поля в оптичній системі, зображення предмета матиме такий розподіл поля:

$$V_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o) V_o(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (3.68)$$

де функція h визначається виразом (3.62).

У рівнянні (3.68) замінимо змінні: $x_{io} = \beta x_o, y_{io} = \beta y_o$, тоді

$$V_i(x_i, y_i) = \frac{1}{\beta^2} \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_{io}, y_i - y_{io}) V_o\left(\frac{x_{io}}{\beta}, \frac{y_{io}}{\beta}\right) dx_{io} dy_{io} =$$

$$= \frac{1}{\beta^2} h(x_i, y_i) * V_o\left(\frac{x_i}{\beta}, \frac{y_i}{\beta}\right). \quad (3.69)$$

Введемо позначення:

$$h_n(x_i, y_i) = \frac{1}{\beta} h(x_i, y_i) =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) \exp[-j2\pi(x_i v_x + y_i v_y)] dv_x dv_y. \quad (3.70)$$

З урахуванням позначень (3.67) і (3.70) вираз (3.69) матиме вигляд

$$V_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_n(x_i - x_{io}, y_i - y_{io}) V_{ig}(x_{io}, y_{io}) dx_{io} dy_{io} =$$

$$= h_n(x_i, y_i) * V_{ig}(x_i, y_i). \quad (3.71)$$

Отриманий вираз (3.71) показує, що з урахуванням дифракційних ефектів зображення $V_i(x_i, y_i)$ не можна вважати точною копією предмета $V_o(x_o, y_o)$. Він являє собою згортку ідеального зображення $V_{ig}(x_i, y_i)$ з нормованою функцією розсіювання $h_n(x_i, y_i)$ тонкої додатної лінзи, тобто зображення є дещо згладженим порівняно з предметом. Згладжування – це наслідок нерівності нулю ширини функції розсіювання, воно може спричинити значне послаблення дрібних деталей предмета і, відповідно, втрату точності під час відтворення зображення.

Крім того, подання вихідного предмета у вигляді згортки вхідного предмета з імпульсним відгуком (функцією розсіювання) дає змогу використовувати для дослідження процесу формування зображення методи просторово-частотного аналізу.

3.4. Операторний метод аналізу когерентних оптичних систем

Аналіз когерентної оптичної системи дозволяє розрахувати комплексну амплітуду світлового поля на її виході або в довільній площині системи. Такий розрахунок за певних наближень можна виконати послідовним застосуванням оператора Френеля на проміжках між елементами системи, що знайшло своє відображення в цьому розділі. Однак при цьому необхідно виконувати достатньо складні і надто громіздкі інтегральні перетворення двовимірних функцій.

Операторний метод, запропонований Вандер Люгтом і представлений в монографії [5], значно спрощує задачу аналізу когерентної оптичної системи. Цей метод, що заснований на узагальненій функції Френеля, дозволяє зробити аналіз когерентної оптичної системи більш наглядним і звести його до набору достатньо простих формалізованих процедур.

3.4.1. Узагальнена функція Френеля

Розглянемо проходження світла в оптичній системі, що представлена на рис. 3.9. Нехай вхідний транспарант має комплексний амплітудний коефіцієнт пропускання

$$t_o(x_2, y_2) = |t_o(x_2, y_2)| \exp[j\varphi_o(x_2, y_2)], \quad (3.72)$$

який здійснює як амплітудну $|t_o(x_2, y_2)|$, так і фазову $\varphi_o(x_2, y_2)$ модуляцію світла. Транспарант (3.72) освітлюється когерентним випромінюванням

$$V_2(x_2, y_2) = U_2(x_2, y_2) \exp[j\varphi_2(x_2, y_2)]. \quad (3.73)$$

Тоді амплітуда поля безпосередньо за транспарантом є добутком функцій (3.72) і (3.73)

$$\begin{aligned} V'_2(x_2, y_2) &= V_2(x_2, y_2) t_o(x_2, y_2) = \\ &= U_2(x_2, y_2) |t_o(x_2, y_2)| \exp\{j[\varphi_2(x_2, y_2) + \varphi_o(x_2, y_2)]\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

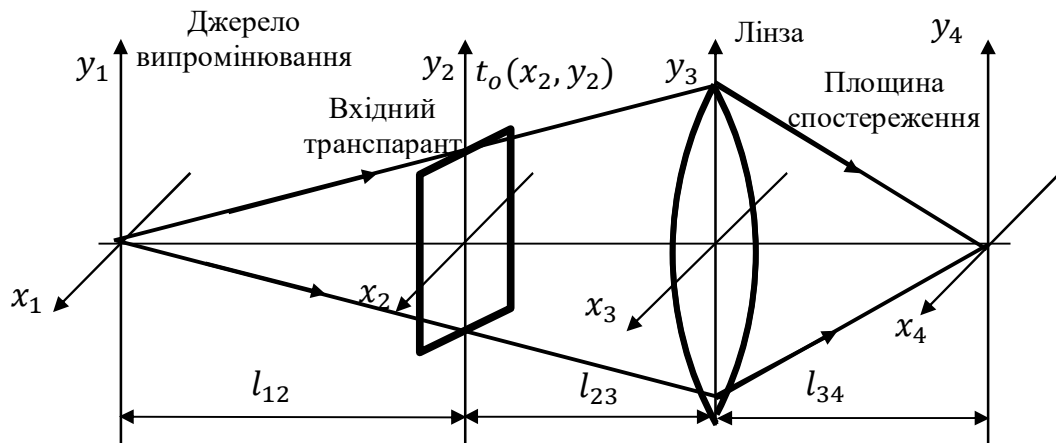


Рис. 3.9. Розповсюдження когерентного випромінювання в оптичній системі з вхідним транспарантом, розташованим перед об'єктивом

Відомо, що тонку додатну лінзу можна розглядати як транспарант, який виконує фазову модуляцію світлової хвилі. В підрозділі 3.1 була

отримана формула (3.15) для амплітудного коефіцієнта пропускання такої лінзи

$$t_l(x_3, y_3) = \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x_3^2 + y_3^2) \right], \quad (3.75)$$

де f – фокусна відстань лінзи; λ – довжина хвилі світла.

Від’ємна лінза має амплітудний коефіцієнт пропускання

$$t_l(x_3, y_3) = \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x_3^2 + y_3^2) \right]. \quad (3.76)$$

Амплітудний коефіцієнт пропускання циліндричної лінзи описується функцією

$$t_l(x_3, y_3) = \exp \left(-j \frac{\pi}{\lambda f} x_3^2 \right), \quad (3.77)$$

або

$$t_l(x_3, y_3) = \exp \left(-j \frac{\pi}{\lambda f} y_3^2 \right) \quad (3.78)$$

в залежності від орієнтації лінзи. Фокусна відстань циліндричних лінз (3.77) і (3.78) в іншому напрямку дорівнює нескінченності. Тобто, в іншому напрямку циліндрична лінза діє подібно до плоскопаралельної пластинки.

Взаємозв’язок між розподілом поля $V_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ в площині $x_{i+1}y_{i+1}$ і розподілом поля $V_i(x_i, y_i)$ площині x_iy_i описується рівнянням дифракції Френеля (2.56)

$$\begin{aligned} V_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) &= \Phi_{i,i+1}\{V_i(x_i, y_i)\} = \\ &= A_F \iint_{S_{i-1}} V_i(x_i, y_i) \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda l_{i,i+1}} [(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2] \right\} dx_i dy_i, \end{aligned} \quad (3.79)$$

де $\Phi_{1,i+1}\{ \}$ – оператор, який описує дифракцію Френеля на ділянці

вільного простору товщиною $l_{i,i+1}$; $A_F = \frac{\exp \left(j \frac{2\pi l_{i,i+1}}{\lambda} \right)}{j \lambda l_{i,i+1}}$ – комплексна постійна.

Співвідношення (3.79) являє собою інтеграл згортки, яку запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} V_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) &= V_i(x_{i+1}, y_{i+1}) * h_F(x_{i+1}, y_{i+1}) = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} V_i(x_i, y_i) h_F(x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}) dx_i dy_i, \end{aligned} \quad (3.80)$$

де

$$h_F(x_{i+1}, y_{i+1}) = \frac{\exp\left(j \frac{2\pi l_{i+1}}{\lambda}\right)}{j \lambda l_{i+1}} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{i+1}} (x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2)\right] \quad (3.81)$$

імпульсний відгук вільного простору при дифракції Френеля.

Для більшої наочності та спрощення математичних перетворень при аналізі розповсюдження світла через систему введемо *узагальнену функцію Френеля*

$$f_F(x, y) = \exp\left[j \frac{\pi L}{\lambda} (x^2 + y^2)\right], \quad (3.82)$$

де $L = 1/l$ - параметр, який має розмірність мм^{-1} .

Очевидно, що узагальнена функція Френеля відповідає з точністю до постійного фазового множника A_F імпульсному відгуку (3.81) при дифракції Френеля.

Дійсно, якщо ввести діоптрійні параметри $\Phi = 1/f$ і $L = 1/l$, то функції (3.75) і (3.81) мають вигляд:

$$t_l(x, y) = f_F(x, y; -\Phi); \quad (3.83)$$

$$h_F(x, y) = f_F(x, y; L). \quad (3.84)$$

Аналогічним чином можна записати функції (3.77) і (3.78). Математичні формули можна спростити, якщо використати векторну форму запису координат точки (x, y)

$$\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0, \quad (3.85)$$

де \vec{x}_0 і \vec{y}_0 – одиничні орти.

В цьому випадку функції (3.82) – (3.84) матимуть вигляд

$$f_F(\vec{r}) = \exp\left(j \frac{\pi L}{\lambda} |\vec{r}|^2\right); \quad (3.86)$$

$$t_l(\vec{r}) = f_F^*(\vec{r}, \Phi); \quad (3.87)$$

$$h_F(\vec{r}) = f_F(\vec{r}, L). \quad (3.88)$$

Аналіз узагальненої функції Френеля (3.82) дозволяє встановити такі її властивості:

1. $f_F(-\vec{r}, L) = f_F(\vec{r}, L)$.
2. $f_F(\vec{r}, L) = f_F^*(\vec{r}, -L)$.
3. $f_F(\vec{r}, L_1) \cdot f_F(\vec{r}, L_2) = f_F(\vec{r}, L_1 + L_2)$.

4. $f_F(\vec{r}, L_1) \cdot f_F^*(\vec{r}, L_2) = f_F(\vec{r}, L_1 - L_2)$.
5. $f_F(a\vec{r}, L) = f_F(\vec{r}, a^2 L)$.
6. $f_F(\vec{r}, L) = f_F(x, L)f_F(y, L)$.
7. $f_F^*(x, L_1) \cdot f_F^*(\vec{r}, L_2) = f_F^*(x, L_1 + L_2)f_F^*(y, L_2);$
 $f_F^*(y, L_1) \cdot f_F^*(\vec{r}, L_2) = f_F^*(x, L_2)f_F^*(y, L_1 + L_2)$.
8. $f_F(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, L) = f_F(\vec{r}_1, L)f_F(\vec{r}_2, L)\exp[jkL(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)]$.
9. $\int_{-\infty}^{\infty} f_F(\vec{r}_1, L_1)\exp[-jkL_2(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)]d\vec{r}_1 = \frac{1}{L_1}f_F^*\left(\vec{r}_2, \frac{L_2}{L_1}\right)$.
10. $\lim_{L \rightarrow 0} f_F^*(\vec{r}, L) = 1$.
11. $\lim_{L \rightarrow \infty} Lf_F^*(\vec{r}, L) = \delta(\vec{r})$.

Властивості 1 і 2 означають, що функція Френеля $f_F(\vec{r}, L)$ симетрична по координатам x і y відповідно і асиметрична уздовж оптичної осі. Властивості 3 – 5 визначають правила множення функцій Френеля і масштабування по координатам. Властивість 6 показує, що функція $f_F(\vec{r}, L)$ є функцією з роздільними змінними. Властивість 7 буде корисною при аналізі оптичної системи, яка складається із сферичної та циліндричної лінз, а властивість 8 – при розрахунку згорток. Властивість 9 виражає правило перетворення Фур'є функції Френеля. Властивість 10 показує, що лінза з нескінченно великою фокусною відстанню не впливає на розподіл світла і еквівалентна плоскопаралельній пластині. Гранична властивість 11 означає, що нескінченно тонкий вільний простір не призводить до дифракційного спотворення оптичного сигналу.

3.4.2. Операторне представлення когерентної оптичної системи

Процес моделювання перетворення світлового поля в когерентних оптичних системах, який розглянуто в підрозділі 3.2, можна спростити, якщо розглядати дію кожного елементу системи у вигляді еквівалентних схем операторів подібно до теорії лінійних систем.

Вхідний транспарант можна представити у вигляді звичайного ланцюга множення – модулятора, як зображено на рис. 3.10. Аналогічним чином

можна представити тонку лінзу, де в якості функції модуляції використовується узагальнена функція Френеля (рис. 3.11).

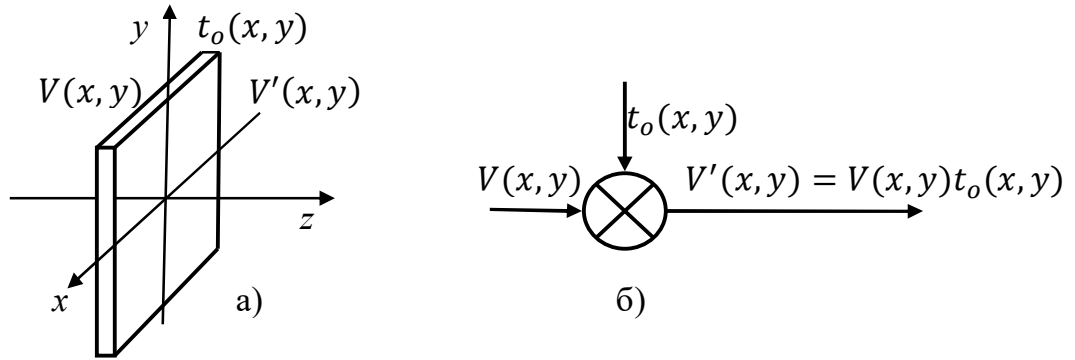


Рис. 3.10. Вхідний оптичний транспарант (а) та його еквівалентна операторна схема (б)

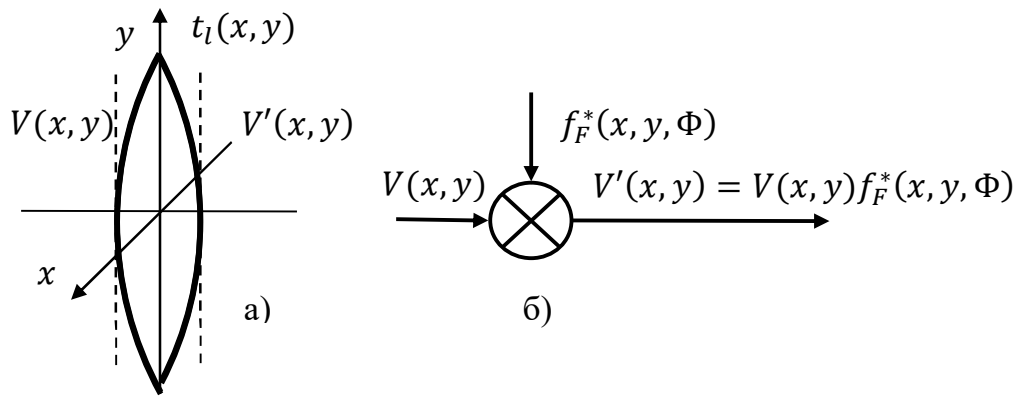


Рис. 3.11. Додатна сферична лінза (а) та її еквівалентна операторна схема (б):
 $\Phi = 1/f$ – оптична сила лінзи

Вільний простір між двома площинами, які перпендикулярні до оптичної осі і знаходяться на відстані l_{12} , можна представити згідно (3.80) лінійним елементом з імпульсним відгуком (3.88) (рис. 3.12).

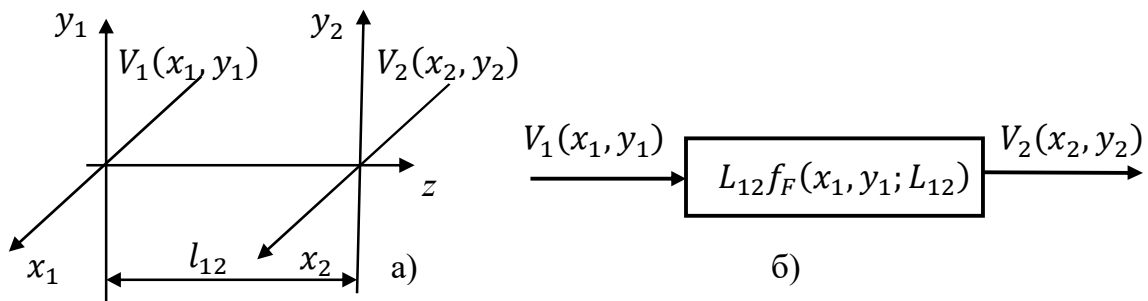


Рис. 3.12. Ділянка вільного простору (а) та її еквівалентна операторна схема: $L_{12} = 1/l_{12}$

3.4.3. Методика операторного аналізу системи

Довільну когерентну оптичну систему можна розглядати як послідовне з'єднання операторів, розглянутих раніше, і представити її у вигляді еквівалентної операторної схеми. Потім, використовуючи рівняння (3.80) і властивості узагальненої функції Френеля, можна послідовно розраховувати розподіл комплексної амплітуди світлового поля у кожній площині оптичної системи.

В якості прикладу застосування операторного аналізу розглянемо найбільш поширену оптичну систему, яку будемо називати *оптичним каскадом* (рис. 3.12).

Нехай вхідна площина освітлюється монохроматичною когерентною сферичною хвилею з радіусом $r_0 = 1/R_0$. Еквівалентна операторна схема оптичного каскаду представлена на рис. 3.13.

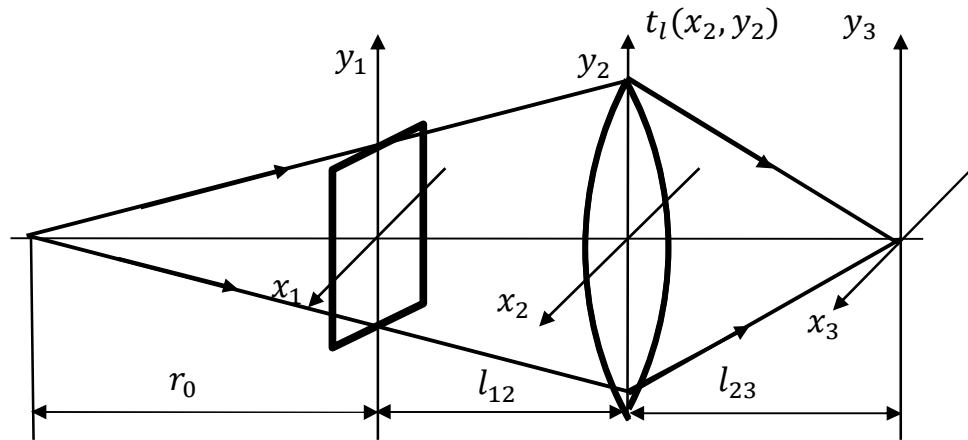


Рис. 3.12. Схема оптичного каскаду

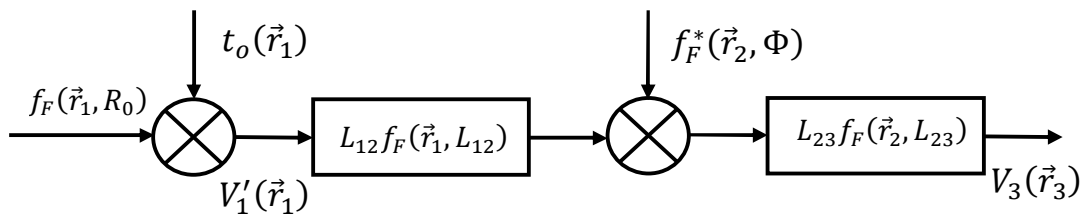


Рис. 3.13. Еквівалентна операторна схема оптичного каскаду

Використовуючи операторну схему і властивості узагальненої функції Френеля $f_F(\vec{r}, L)$ розрахуємо комплексні амплітуди світлового поля в площинах $x_i y_i$, де $i = 1, 2, 3$.

Амплітуда поля на виході транспаранта, який розташований у площині $x_1 y_1$, дорівнює

$$V'_1(\vec{r}_1) = V_1(\vec{r}_1) t_o(\vec{r}_1) = f_F(\vec{r}_1, R_0) t_o(\vec{r}_1). \quad (3.89)$$

Амплітуда поля у площині $x_2 y_2$ перед лінзою з урахуванням виразу (3.89) дорівнює

$$\begin{aligned} V_2(\vec{r}_2) &= L_{12} \iint_{-\infty}^{\infty} V'_1(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, L_{12}) d\vec{r}_1 = \\ &= L_{12} \iint_{-\infty}^{\infty} f_F(\vec{r}_1, R_0) t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, L_{12}) d\vec{r}_1 = [\text{Власт. 8}] = \\ &= L_{12} f_F(\vec{r}_2, L_{12}) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0) f_F(\vec{r}_1, L_{12}) \exp(-jkL_{12}\vec{r}_1\vec{r}_2) d\vec{r}_1 = [\text{Власт. 3}] \\ &= \\ &= L_{12} f_F(\vec{r}_2, L_{12}) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) \exp(-jkL_{12}\vec{r}_1\vec{r}_2) d\vec{r}_1, \quad (3.90) \end{aligned}$$

де $d\vec{r}_1 = dx_1 dy_1$.

Амплітуда поля у площині $x_2 y_2$ за лінзою з урахуванням виразу (3.90) дорівнює

$$\begin{aligned} V'_1(\vec{r}_2) &= V_2(\vec{r}_2) f_F^*(\vec{r}_2, \Phi) = L_{12} f_F(\vec{r}_2, L_{12}) f_F^*(\vec{r}_2, \Phi) \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) \exp(-jkL_{12}\vec{r}_1\vec{r}_2) d\vec{r}_1 = [\text{Власт. 4}] = \\ &= L_{12} f_F(\vec{r}_2, L_{12} - \Phi) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) \exp(-jkL_{12}\vec{r}_1\vec{r}_2) d\vec{r}_1. \quad (3.91) \end{aligned}$$

Амплітуда поля у площині $x_3 y_3$ з урахуванням виразу (3.91) дорівнює

$$V_3(\vec{r}_3) = L_{23} \iint_{-\infty}^{\infty} V'_1(\vec{r}_2) f_F(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, L_{23}) d\vec{r}_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= L_{12}L_{23} \iint_{-\infty}^{\infty} f_F(\vec{r}_2, L_{12} - \Phi) f_F(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, L_{23}) \times \\
&\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) \exp(-jkL_{12}\vec{r}_1\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = [\text{Власт. 8}] = \\
&= L_{12}L_{23} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) \iint_{-\infty}^{\infty} f_F(\vec{r}_2, L_{12} - \Phi) f_F(\vec{r}_2, L_{23}) \exp(-jkL_{23}\vec{r}_2\vec{r}_3) \times \\
&\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) \exp(-jkL_{12}\vec{r}_1\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = [\text{Власт. 3}] = \\
&= L_{12}L_{23} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) \times \\
&\times \iint_{-\infty}^{\infty} f_F(\vec{r}_2, L_{12} + L_{23} - \Phi) \exp\left\{-jkL_{23}\left[\vec{r}_2\vec{r}_3 + \frac{L_{12}}{L_{23}}(\vec{r}_1\vec{r}_2)\right]\right\} d\vec{r}_2 d\vec{r}_1 = [\text{Власт. 9}] \\
&= \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12}+L_{23}-\Phi} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) \times \\
&\times f_F^*\left[\left(\vec{r}_1 + \frac{L_{23}}{L_{12}}\vec{r}_3\right), \frac{L_{12}^2}{L_{12}+L_{23}-\Phi}\right] d\vec{r}_1. \tag{3.92}
\end{aligned}$$

Співвідношення (3.92), яке називається *рівнянням оптичного каскаду*, визначає розподіл амплітуди світлового поля у вихідній площині x_3y_3 . В залежності від співвідношення між параметрами R_0, L_{12}, L_{23} і Φ рівняння оптичного каскаду набуває різного вигляду.

Розглянемо випадок, коли виконується умова

$$L_{12} + L_{23} - \Phi = 0. \tag{3.93}$$

В цьому випадку рівняння (3.92), з урахуванням умови (3.93) і властивості 11 функції Френеля f_F , матиме вигляд

$$V_3(\vec{r}_3) = \frac{L_{23}}{L_{12}} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) \delta\left[\left(\vec{r}_1 + \frac{L_{23}}{L_{12}}\vec{r}_3\right)\right] d\vec{r}_1. \tag{3.94}$$

Використовуючи фільтруючу властивість дельта-функції та властивості 3 і 5 функції Френеля f_F , рівняння (3.94) матиме вигляд

$$\begin{aligned}
V_3(\vec{r}_3) &= \frac{L_{23}}{L_{12}} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) f_F\left(\frac{L_{23}}{L_{12}} \vec{r}_3, R_0 + L_{12}\right) t_o\left(-\frac{L_{23}}{L_{12}} \vec{r}_3\right) = \\
&= \frac{L_{23}}{L_{12}} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) f_F\left(\vec{r}_3, \frac{(R_0 + L_{12})L_{23}^2}{L_{12}^2}\right) t_o\left(-\frac{L_{23}}{L_{12}} \vec{r}_3\right). \quad (3.95)
\end{aligned}$$

Вираз (3.95) показує, що оптичний каскад при виконанні умови (3.93) діє як система, що створює зображення із лінійним збільшенням $\beta = -\frac{L_{23}}{L_{12}}$. При цьому квадратичний фазовий множник у функції Френеля відповідає сферичній хвилі, яку утворює точкове джерело випромінювання, що розташоване зліва від площини x_3y_3 на відстані

$$l = \frac{1}{L_{23} + \frac{(R_0 + L_{12})L_{23}^2}{L_{12}^2}}. \quad (3.96)$$

Умову (3.93) можна представити у вигляді

$$\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} = \frac{1}{f}. \quad (3.97)$$

Вираз (3.97) відповідає *формулі лінзи у відрізках*. Тому оптичний каскад, параметри якого задовольняють умовам (3.93) або (3.97), називається *каскадом, що створює зображення*.

Розглянемо ще один випадок оптичного каскаду, коли виконується умова

$$L_{23} = \Phi, \quad \text{або} \quad l_{23} = f. \quad (3.98)$$

Для цього випадку перетворимо вираз (3.92), використовуючи властивість 8 функції Френеля f_F :

$$\begin{aligned}
V_3(x_3, y_3) &= \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12} + L_{23} - \Phi} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) f_F^*\left(\frac{L_{23}}{L_{12}} \vec{r}_3, \frac{L_{12}^2}{L_{12} + L_{23} - \Phi}\right) \times \\
&\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0 + L_{12}) f_F^*\left(\vec{r}_1, \frac{L_{12}^2}{L_{12} + L_{23} - \Phi}\right) \exp\left[-jk \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12} + L_{23} - \Phi} (\vec{r}_1 \vec{r}_3)\right] d\vec{r}_1 = \\
&= [\text{Власт. 4 і 5}] = \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12} + L_{23} - \Phi} f_F\left(\vec{r}_3, \frac{(L_{12} + L_{23})L_{23}}{L_{12} + L_{23} - \Phi}\right) \times \\
&\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F\left(\vec{r}_1, R_0 + L_{12} - \frac{L_{12}^2}{L_{12} + L_{23} - \Phi}\right) \exp\left[-jk \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12} + L_{23} - \Phi} (\vec{r}_1 \vec{r}_3)\right] d\vec{r}_1. \quad (3.99)
\end{aligned}$$

З врахуванням умови (3.98) вираз (3.99) можна представити у вигляді:

$$V_3(x_3, y_3) = L_{23} f_F \left(\vec{r}_3, \frac{(L_{12} - \Phi)\Phi}{L_{12}} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1, R_0) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_1 \vec{r}_3)] d\vec{r}_1. \quad (3.100)$$

Нехай транспарант освітлюється плоскою когерентною хвилею, для якої $R_0 = 0$. Тоді з врахуванням властивості 10 функції Френеля, вираз (3.100) матиме більш простіший вигляд:

$$V_3(x_3, y_3) = L_{23} f_F \left(x_3, y_3, \frac{(L_{12} - \Phi)\Phi}{L_{12}} \right) \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_1 x_3 + y_1 y_3) \right] dx_1 dy_1. \quad (3.101)$$

Як видно із виразу (3.101), розподіл поля на виході оптичного каскаду за умови (3.98) з точністю до квадратичного фазового множника $f_F \left(x_3, y_3, \frac{(L_{12} - \Phi)\Phi}{L_{12}} \right)$ дорівнює двовимірному просторовому спектру амплітудного коефіцієнта пропускання $t_o(x_1, y_1)$ транспаранта для просторових частот

$$v_x = \frac{x_3}{\lambda f}; \quad v_y = \frac{y_3}{\lambda f}. \quad (3.102)$$

Для вилучення квадратичного фазового множника необхідно виконання умови

$$f_F \left(x_3, y_3; \frac{(L_{12} - \Phi)\Phi}{L_{12}} \right) = \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda} \frac{(L_{12} - \Phi)\Phi}{L_{12}} (x_3^2 + y_3^2) \right] = 1. \quad (3.103)$$

З умови (3.103) маємо

$$L_{12} - \Phi = 0, \text{ або } l_{12} = f. \quad (3.104)$$

Оптичний каскад, для якого виконуються умови (3.93) і (3.104), називають *фур'є-каскадом*.

Необхідно відзначити, що якщо світлове поле оптичного каскаду реєструється приймачем випромінювання, то в результаті операції піднесення до квадрату фазового множника цей множник дорівнює одиниці. Але при аналізі багатьох каскадних оптичних систем, де вихід одного є входом для іншого, врахування цього множника обов'язкове.

3.5. Приклади розрахунку розподілу світлового поля в оптичних системах

Приклад 3.1. Амплітудний коефіцієнт пропускання екрана описують функцією, що має осьову симетрію:

$$t_o(r) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\alpha r^2)].$$

Доведіть, що такий екран діє подібно до лінзи. Знайдіть фокусну відстань цієї лінзи.

Розв'язання. Нехай на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди. Тоді розподіл поля безпосередньо за екраном описують функцією

$$V(x, y) = t_o(x, y) = \frac{1}{2}\{1 + \cos[\alpha(x^2 + y^2)]\}. \quad (3.105)$$

Розподіл поля у площині спостереження $x_o y_o$, паралельній екрану і розміщеній на відстані z від нього, знаходять за формулою дифракції Френеля (2.56), яку без урахування фазового множника можна подати у вигляді

$$V(x_o, y_o) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]\right\} dx dy. \quad (3.106)$$

Запишемо функцію (3.105) у комплексному вигляді, використовуючи формулу Ейлера $\cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$, і підставимо її в інтеграл (3.106):

$$V(x_o, y_o) = \frac{1}{2j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{1 + \frac{1}{2} \exp[j\alpha(x^2 + y^2)] + \frac{1}{2} \exp[-j\alpha(x^2 + y^2)]\right\} \times \\ \times \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]\right\} dx dy. \quad (3.107)$$

Визначимо амплітуду поля в центрі дифракційної картини (3.107), коли $x_o = y_o = 0$:

$$V(0,0) = \frac{1}{2j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] + \frac{1}{2} \exp[j\alpha(x^2 + y^2)] \times \right. \\ \times \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] + \frac{1}{2} \exp[-j\alpha(x^2 + y^2)] \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] \left. \right\} dx dy = \\ = \frac{1}{2j\lambda z} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (3.108)$$

$$\text{де} \quad I_1 = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] dx dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} x^2\right) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} y^2\right) dy = I_{11} I_{12}; \quad (3.109)$$

$$I_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j \left(\frac{\pi}{\lambda z} + j\alpha\right) (x^2 + y^2)\right] dx dy = I_{21} I_{22}; \quad (3.110)$$

$$I_3 = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j \left(\frac{\pi}{\lambda z} - j\alpha \right) (x^2 + y^2) \right] dx dy = I_{31} I_{32}. \quad (3.111)$$

Обчислимо інтеграли I_{mn} у співвідношеннях (3.109)–(3.111). Подамо інтеграл I_{11} у вигляді

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} x^2 \right) dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos \left(\frac{\pi}{\lambda z} x^2 \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{\lambda z} x^2 \right) \right] dx. \quad (3.112)$$

Для обчислення інтеграла (3.112) скористаємося табличними інтегралами 858.561 з таблиці інтегралів [4]:

$$\int_0^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \int_0^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \frac{1}{2}. \quad (3.113)$$

Замінімо змінні в (3.112): $\sqrt{2/\lambda z} x = t$; $dx = \sqrt{\lambda z/2} dt$. Тоді з урахуванням інтегралу (3.113) маємо

$$I_{11} = 4 \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \int_0^{\infty} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) \right] dt = 2 \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} (1 + j). \quad (3.114)$$

Аналогічно інтегралу (3.114) знаходимо: $I_{12} = 2 \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} (1 + j)$.

Розрахуємо інтеграл I_{21} , подавши його у вигляді

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j \left(\frac{\pi}{\lambda z} + \alpha \right) x^2 \right] dx = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \cos \left[\left(\frac{\pi}{\lambda z} + j\alpha \right) x^2 \right] + j \sin \left[\left(\frac{\pi}{\lambda z} + \alpha \right) x^2 \right] \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Замінімо змінні в інтегралі (3.115):

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{\lambda z} + \alpha \right)} x = t; \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)}} dt,$$

тоді

$$I_{21} = 4 \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)}} \int_0^{\infty} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) \right] dt = 2 \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)}} (1 + j). \quad (3.116)$$

Аналогічно інтегралу (3.116) знаходимо, що

$$I_{22} = 2 \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)}} (1 + j); \quad I_{31} = I_{32} = 2 \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda z} - \frac{\alpha}{\pi} \right)}} (1 + j). \quad (3.117)$$

Підставимо знайдені інтеграли (3.114)–(3.117) у вираз (3.108):

$$\begin{aligned} V(0,0) &= \frac{1}{j\lambda z} (1 + j)^2 \left[\lambda z + \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda z} - \frac{\alpha}{\pi} \right)} \right] = \\ &= (1 + j)^2 \frac{1}{j} \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha \lambda z}{\pi} \right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha \lambda z}{\pi} \right)} \right] = (1 + j)^2 \frac{1}{j} \left[1 + \frac{2}{1 - \left(\frac{\alpha \lambda z}{\pi} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Функція (3.118) набуває максимального значення, тобто екран працює як лінза у тому випадку, коли виконується умова $\frac{\alpha\lambda z}{\pi} = 1$. Звідси знаходимо фокусну відстань екрана:

$$z = f = \frac{\pi}{\alpha\lambda}. \quad (3.119)$$

Приклад 3.2. Плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди нормально падає на додатну лінзу, яка має вхідну зіницю діаметром D_p і фокусну відстань f . На відстані l за лінзою на її осі розміщено предмет, амплітудний коефіцієнт пропускання якого

$$t_o(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\nu_0 x) \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right).$$

Знайдіть розподіл інтенсивності у фокальній площині лінзи.

Розв'язання. Описана у прикладі оптична система (рис. 3.14) виконує перетворення Фур'є амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта, а розподіл амплітуди поля у фокальній площині лінзи визначається виразом (3.48), фазовий множник у якому не впливає на розподіл інтенсивності і тому у розрахунках ним можна знехтувати. Виберемо систему координат, яка б відповідала рис. 3.7 і виразу (3.48) (рис. 3.14), де $l = l_{23}$.

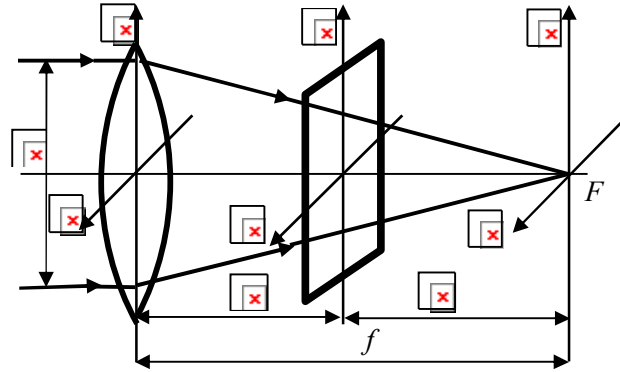


Рис. 3.14. До прикладу 3.2

Подамо вираз (3.48) у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_4, y_4) &= \frac{f}{\lambda l_{34}^2} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_3, y_3) P\left(\frac{f}{l_{34}} x_3, \frac{f}{l_{34}} y_3\right) \exp\left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{34}} (x_3 x_4 + y_3 y_4)\right] dx_3 dy_3 = \\ &= \frac{f}{\lambda l_{34}^2} F\left\{t_o(x_3, y_3) P\left(\frac{f}{l_{34}} x_3, \frac{f}{l_{34}} y_3\right)\right\} = \frac{f}{\lambda l_{34}^2} [\tilde{t}_o(\nu_x, \nu_y) * \tilde{P}_{ef}(\nu_x, \nu_y)], \end{aligned} \quad (3.120)$$

де $F\{\}$ – оператор двовимірного перетворення Фур'є; \tilde{t}_o і \tilde{P}_{ef} – просторові спектри функцій t_o і P відповідно; ν_x, ν_y – просторові частоти, які знаходять

за формулою (3.49), $v_x = \frac{x_4}{\lambda l_{34}}$; $v_y = \frac{y_4}{\lambda l_{34}}$. Символ $\langle * \rangle$ у функції (3.120) означає операцію згортки.

Розрахуємо функцію $\tilde{t}_o(v_x, v_y)$:

$$\tilde{t}_o(v_x, v_y) = F\{t_o(x_3, y_3)\} = F\left\{\frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi v_0 x_3)] \text{rect}\left(\frac{x_3}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y_3}{b}\right)\right\}. \quad (3.121)$$

Перетворення Фур'є (3.121), яке було детально розглянуте в п. 2.7.3, дає згідно з функцією (2.108) такий результат:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_o(v_x, v_y) &= a \text{sinc}(b v_y) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \text{sinc}(a v_x) + \frac{1}{4} \text{sinc}[a(v_x - v_0)] + \frac{1}{4} \text{sinc}[a(v_x + v_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Розрахуємо функцію $\tilde{P}_{ef}(v_x, v_y)$. Функція $\frac{1}{\lambda l_{34}} \tilde{P}_{ef}(v_x, v_y)$ описує дифракцію Фраунгофера на круглому отворі діаметром $D_p l_{34}/f$ (див. п. 2.7.2). При цьому розподіл поля у фокальній площині лінзи згідно з інтегралом (2.85) можна знайти за виразом

$$\frac{1}{\lambda l_{34}} \tilde{P}_{ef}(v_x, v_y) = \frac{\pi D_p^2}{4 \lambda l_{34}} \left(\frac{l_{34}}{f}\right)^2 \left[2 \frac{J_1\left(\pi D_p \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)}{\pi D_p \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right]. \quad (3.123)$$

Підставимо функції (3.122) і (3.123) в інтеграл згортки (3.120):

$$\begin{aligned} V(x_4, y_4) &= \frac{\pi D_p^2}{\lambda f} \left\{ a \text{sinc}(b v_y) \left\{ \frac{1}{2} \text{sinc}(a v_x) + \frac{1}{4} \text{sinc}[a(v_x - v_0)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \text{sinc}[a(v_x + v_0)] \right\} * \left[2 \frac{J_1\left(\pi D_p \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)}{\pi D_p \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Вираз (3.124) можна значно спростити, якщо параметри оптичної системи задовольняють такі умови:

1. Діаметр зведеної вхідної зіниці $D_p l_{34}/f$ набагато менший за розміри транспаранта $a \times b$.

2. Просторова частота транспаранта задовольняє умову $v_0 \gg \frac{x_4}{\lambda l_{34}}$.

Якщо виконується перша умова, то $a \text{sinc}(a v_x) \rightarrow \delta(v_x)$ і $b \text{sinc}(b v_y) \rightarrow \delta(v_y)$. Тоді вираз (3.124) можна подати у вигляді

$$\tilde{t}_o(v_x, v_y) = \delta(v_y) \left\{ \frac{1}{2} \delta(v_x) + \frac{1}{4} \delta(v_x - v_0) + \frac{1}{4} \delta(v_x + v_0) \right\}. \quad (3.125)$$

Підставимо функцію (3.125) в інтеграл (3.124) і використаємо фільтрувальну властивість дельта-функції (2.107). З урахуванням формул (3.49) для просторової частоти маємо

$$V(x_4, y_4) = \frac{D_p^2}{\lambda f} \left\{ \frac{1}{2} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2}} \right] + \frac{1}{4} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2}} \right] \right\}. \quad (3.126)$$

Якщо виконується друга умова $x_4 \ll \lambda l_{34} v_0$, то окремі складові у функції (3.126) не перекриваються у площині $x_4 y_4$, а тому добуток будь-яких двох цих складових дорівнює нулю. Тоді розподіл інтенсивності у фокальній площині лінзи з урахуванням (3.126) визначатиметься як

$$I(x_4, y_4) = |V(x_4, y_4)|^2 = \left(\frac{\pi D_p^2}{\lambda f} \right)^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2}} \right]^2 + \frac{1}{16} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2}} \right]^2 \right\}. \quad (3.127)$$

Отже, розподіл інтенсивності (3.127) у фокальній площині лінзи являє собою три дифракційних картини Фраунгофера на круглому отворі (картини Ейрі). Одна з них перебуває у фокусі лінзи, а дві інші зміщені уздовж осі x_4 на величину $\pm \lambda l_{34} v_0$. Причому інтенсивність зміщених картин у чотири рази менша від інтенсивності центральної картини.

Приклад 3.3. Розрахуйте за допомогою операторного методу амплітуду поля в задній фокальній площині тонкої сферичної лінзи з фокусною відстанню f , якщо на неї нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди, а перед фокальною площиною на відстані $l_{23} < f$ розташований вхідний транспарант з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_2, y_2)$ (рис. 3.15).

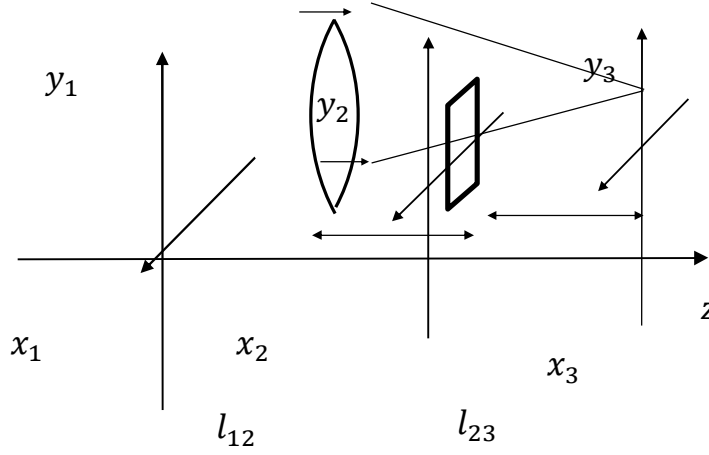


Рис. 3.15. Оптика прикладу 3.3

Розв'язання. 1. Зробимо позначення: $\Phi = 1/f$, $L_{23} = 1/l_{23}$, $l_{12} = f - l_{23}$, $L_{12} = 1/l_{12} = \Phi L_{23} / (L_{23} - \Phi)$.

2. Складемо еквівалентну операторну схему (рис. 3.16).

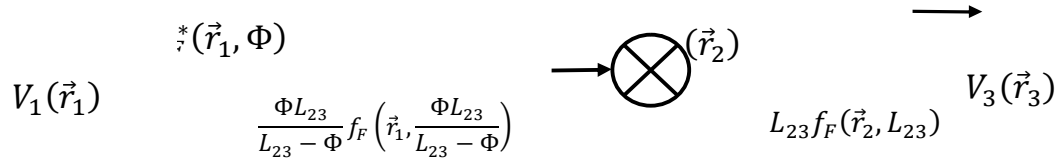


Рис. 3.16. Операторна схема до прикладу 3.4

3. Розраховуємо амплітуду поля у площині $x_3 y_3$, використовуючи методику п. 3.4.3.

$$\begin{aligned}
 V_3(x_3, y_3) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} f_F^*(\vec{r}_1, \Phi) t_o(\vec{r}_2) \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi} f_F\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi}\right) \times \\
 &\quad L_{23} f_F(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, L_{23}) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = [\text{Власт. 8}] = \\
 &= \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_2) f_F^*(\vec{r}_1, \Phi) \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi} f_F\left(\vec{r}_1, \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi}\right) f_F\left(\vec{r}_2, \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi}\right) \times \\
 &\quad \times f_F(\vec{r}_2, L_{23}) f_F(\vec{r}_3, L_{23}) \exp\left[-jk \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi} (\vec{r}_1 \vec{r}_2)\right] \exp[-jk L_{23} (\vec{r}_2 \vec{r}_3)] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = \\
 &= [\text{Власт. 3 і 4}] = \frac{\Phi L_{23}^2}{L_{23} - \Phi} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_2) f_F\left(\vec{r}_1, \frac{\Phi^2}{L_{23} - \Phi}\right) \times \\
 &\quad \times f_F\left(\vec{r}_2, \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi}\right) \exp\left[-jk \frac{\Phi L_{23}}{L_{23} - \Phi} (\vec{r}_1 \vec{r}_2)\right] \exp[-jk L_{23} (\vec{r}_2 \vec{r}_3)] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = \\
 &= \frac{\Phi L_{23}^2}{L_{23} - \Phi} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_2) f_F\left(\vec{r}_2, \frac{\Phi^2}{L_{23} - \Phi}\right) \exp[-jk L_{23} (\vec{r}_2 \vec{r}_3)] \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \iint_{-\infty}^{\infty} f_F\left(\vec{r}_1, \frac{\Phi^2}{L_{23}-\Phi}\right) \exp\left[-jk \frac{\Phi L_{23}}{L_{23}-\Phi}(\vec{r}_1 \vec{r}_2)\right] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = \\
& = \frac{L_{23}^2}{\Phi} f_F(\vec{r}_3, L_{23}) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(\vec{r}_2) f_F\left(\vec{r}_2, \frac{L_{23}^2}{L_{23}-\Phi}\right) f_F^*\left(\vec{r}_2, \frac{L_{23}^2}{L_{23}-\Phi}\right) \exp[-jk L_{23}(\vec{r}_2 \vec{r}_3)] d\vec{r}_2 = \\
& = \frac{L_{23}^2}{\Phi} f_F(x_3, y_3; L_{23}) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda l_{23}}(x_2 x_3 + y_2 y_3)\right] dx_2 dy_2.
\end{aligned}$$

Отриманий вираз з точністю до фазового множника $\exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{23}}(x_3^2 + y_3^2)\right]$ описує перетворення Фур'є амплітудного коефіцієнта пропускання $t_o(x_2, y_2)$ транспаранта для просторових частот $\nu_x = \frac{x_3}{\lambda l_{23}}$; $\nu_y = \frac{y_3}{\lambda l_{23}}$.

Зміною відстані l_{23} від транспаранта до задньої фокальної площини лінзи можна змінювати масштаб перетворення Фур'є. В зв'язку з цим оптична система, що зображена на рис. 3.15, називається *фур'є-каскадом із змінним масштабом*.

Приклад 3.4. Розрахуйте амплітуду поля у вихідній площині $x_3 y_3$ астигматичного каскаду, оптична схема якого представлена на рис. 3.17. Оптична схема складається із циліндричної лінзи L_1 з фокусною $f_1 = f_{1y}$ і традиційної сферичної лінзи L_2 з фокусною f_2 . Лінзи розташовані в одній площині $x_2 y_2$ і вважаються тонким. Вхідний транспарант з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_1, y_1)$ розташований у вхідній площині $x_1 y_1$, яка освітлюється плоскою монохроматичною хвилею, яка нормально падає на площину $x_1 y_1$.

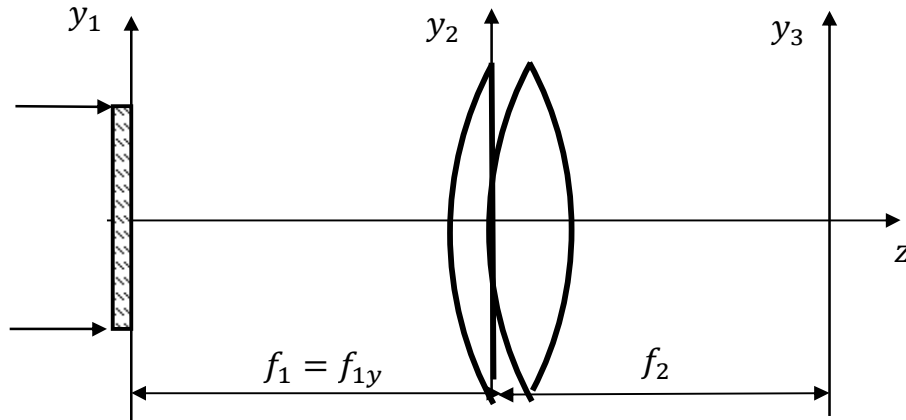


Рис. 3.17. Оптична схема до прикладу 3.4

Розв'язання. 1. Зробимо позначення: $\Phi_1 = 1/f_1$, $\Phi_2 = 1/f_2$, де Φ_1 і Φ_2 – оптичні сили циліндричної та сферичної лінз відповідно.

2. Складаємо еквівалентну операторну схему (рис. 3.18). При цьому будемо враховувати, що циліндрична лінза L_1 має амплітудний коефіцієнт пропускання, який залежить тільки від координати y_2 (див. формулу (3.15)):

$$t_{l1}(y_2) = \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda f_1} y_2^2\right) = f_F^*(y_2, \Phi_1).$$

3. Розраховуємо амплітуду поля у площині аналізу $x_3 y_3$, використовуючи методику п. 3.4.3.

$$\begin{aligned} V_3(x_3, y_3) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) f_F^*(y_2, \Phi_1) f_F^*(x_2, y_2, \Phi_2) \times \\ &\times \Phi_1 f_F(x_1 - x_2, y_1 - y_2; \Phi_1) \Phi_1 f_F(x_2 - x_3, y_2 - y_3; \Phi_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= [\text{Власт. 8}] = \Phi_1 \Phi_2 \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) f_F^*(y_2, \Phi_1) f_F(x_1, y_1; \Phi_1) \times \\ &\times f_F(x_2, y_2; \Phi_1) f_F^*(x_2, y_2, \Phi_2) f_F(x_2, y_2; \Phi_2) f_F(x_3, y_3; \Phi_2) \times \\ &\times \exp\left\{-jk\Phi_1 \left[x_2 x_1 + y_2 y_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} (x_1 x_3 + y_1 y_3)\right]\right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= [\text{Власт. 6}] = \Phi_1 \Phi_2 f_F(x_3, y_3; \Phi_2) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) f_F(x_1, y_1; \Phi_1) \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} f_F(x_2, y_2; \Phi_1) f_F^*(y_2; \Phi_1) \times \\ &\times \exp\left\{-jk\Phi_1 \left[x_2 \left(x_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} x_3\right) + y_2 \left(y_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} y_3\right)\right]\right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= \Phi_1 \Phi_2 f_F(x_3, y_3; \Phi_2) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) f_F(x_1, y_1; \Phi_1) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} f_F(x_2; \Phi_1) \exp\left[-jk\Phi_1 x_2 \left(x_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} x_3\right)\right] dx_2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-jk\Phi_1 y_2 \left(y_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} y_3\right)\right] dy_2 dx_1 dy_1 = [\text{Власт. 3}] = \\ &= \Phi_2 f_F(x_3, y_3; \Phi_2) \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) f_F(x_1, y_1; \Phi_1) f_F^*\left(x_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} x_3\right) \times \\ &\times \delta\left(y_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} y_3\right) dx_1 dy_1 = [\text{Власт. 6, 8}] = \Phi_2 f_F(x_3, y_3; \Phi_2) \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) f_F(y_1; \Phi_1) f_F(x_1; \Phi_1) f_F^*(x_1; \Phi_1) f_F^*\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} x_2; \Phi_1\right) \times \\ &\times \exp(-jk\Phi_2 x_1 x_3) \delta\left(y_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} y_3\right) dx_1 dy_1 = [\text{Власт. 5, 6}] = \\ &= \Phi_2 f_F(x_3; \Phi_2) f_F^*\left(x_3; \frac{\Phi_2^2}{\Phi_1}\right) f_F(y_3; \Phi_2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) f_F(y_1; \Phi_1) \delta\left(y_1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} y_3\right) \exp(-jk\Phi_2 x_1 x_3) dx_1 dy_1 = \\
& = [\text{Власт. 4}] = \Phi_2 \left(x_3; \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)\Phi_2}{\Phi_1}\right) f_F(y_3; \Phi_2) f_F\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} y_3; \Phi_1\right) \times \\
& \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} t_o\left(x_1 - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} y_3\right) \exp(-jk\Phi_2 x_1 x_3) dx_1 = \\
& = \Phi_2 \left(x_3; \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)\Phi_2}{\Phi_1}\right) f_F(y_3; \Phi_2) f_F\left(y_3; \frac{(\Phi_1 + \Phi_2)\Phi_2}{\Phi_1}\right) \times \\
& \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} t_o\left(x_1 - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} y_3\right) \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda f_2} x_1 x_3\right) dx_1.
\end{aligned}$$

Отриманий вираз показує, що астигматичний каскад формує у площині $x_3 y_3$ зображення транспаранта t_o по осі y_3 з лінійним збільшенням $\beta = -\Phi_2/\Phi_1 = -f_1/f_2$ і з точністю до фазового множника утворює одновимірний просторовий спектр функції $t_o(x_3, y_3)$ по координаті x_3 з просторовою частотою $\nu_x = x_3/\lambda f_2$. На основі такого каскаду створюються багатоканальні оптичні системи обробки інформації.

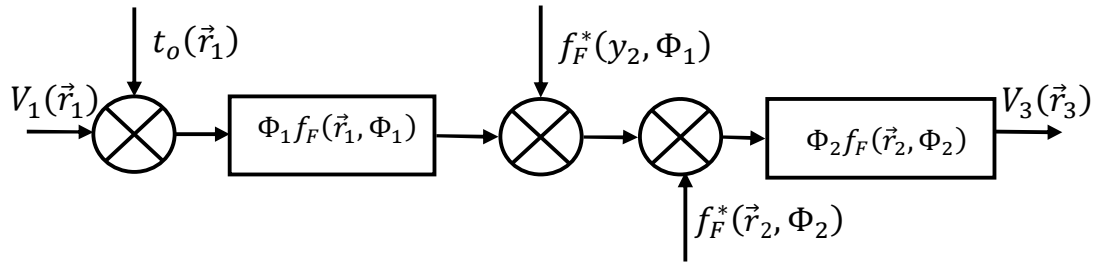


Рис. 3.18. Операторна схема до прикладу 3.4

Приклад 3.5. Знайдіть розподіл інтенсивності світла на виході багато каскадної оптичної системи, яка складається із точкового когерентного джерела випромінювання одиничної амплітуди, двох транспарантів $t_{o1}(x_3, y_3)$ та $t_{o2}(x_5, y_5)$ і трьох тонких сферичних лінз з однаковими фокусними відстанями f (рис. 3.19). Транспарант $t_{o2}(x_5, y_5)$ і третя лінза знаходяться в одній площині $x_5 y_5$.

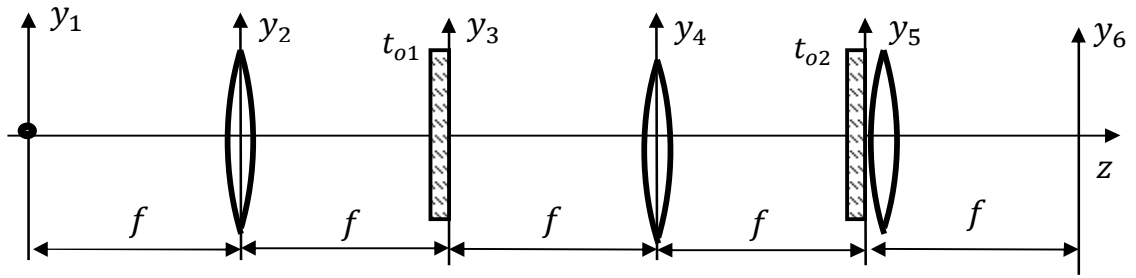


Рис. 3.19. Оптична схема до прикладу 3.5

Крім того, амплітудні коефіцієнти пропускання задаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 t_{o1}(x_3, y_3) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{t}_{o1}(x_5, y_5) \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_3 x_5 + y_3 y_5) \right] dx_5 dy_5 = \\
 &= \mathcal{F}^* \{ \tilde{t}_{o1}(v_x, v_y) \}; \\
 t_{o2}(x_5, y_5) &= \tilde{t}_{o2}(v_x, v_y) = \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{t}_{o2}(x_3, y_3) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_5 x_3 + y_5 y_3) \right] dx_3 dy_3 = \mathcal{F} \{ \tilde{t}_{o1}(v_x, v_y) \},
 \end{aligned}$$

де $\mathcal{F}^* \{ \}$ і $\mathcal{F} \{ \}$ – оператори оберненого і прямого перетворення Фур'є для просторових частот $v_x = x_5/\lambda f$ і $v_y = y_5/\lambda f$ відповідно.

Розв'язання. 1. Розподіл амплітуди поля у вхідній площині $x_1 y_1$ описується дельта-функцією $V_1(x_1, y_1) = \delta(x_1, y_1)$

2. Складаємо еквівалентну операторну схему (рис. 3.20).

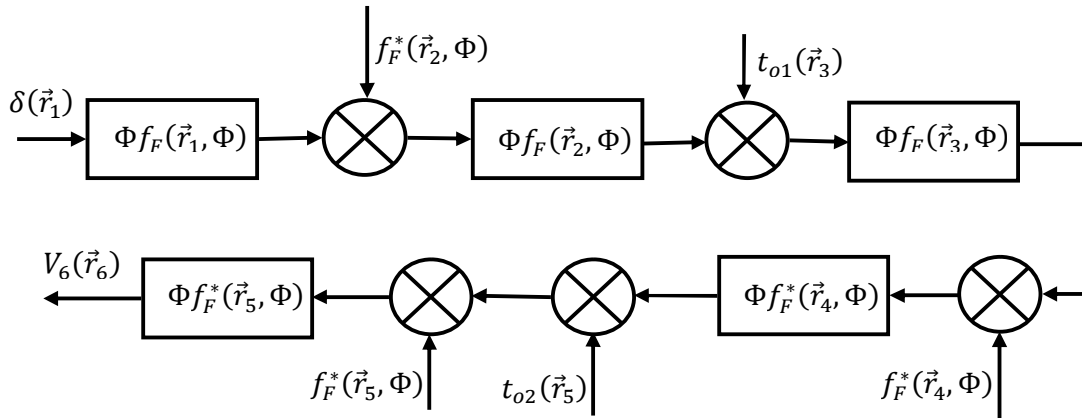


Рис. 3.20. Операторна схема до прикладу 3.5

3. Розрахуємо амплітуду поля у площині аналізу $x_6 y_6$, використовуючи методику п. 3.4.3. Для спрощення математичних перетворень будемо записувати інтеграл по площі $s_i = x_i y_i$ у вигляді $\int_{s_i} f(x_i y_i) ds_i$. Тоді

$$\begin{aligned}
V_6(x_6, y_6) &= \int_{s_1} \int_{s_2} \int_{s_3} \int_{s_4} \int_{s_5} \delta(\vec{r}_1) t_{o1}(\vec{r}_3) t_{o2}(\vec{r}_5) f_F^*(\vec{r}_2; \Phi) f_F^*(\vec{r}_4; \Phi) f_F^*(\vec{r}_5; \Phi) \times \\
&\quad \times \Phi f_F(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \Phi) \Phi f_F(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, \Phi) \Phi f_F(\vec{r}_3 - \vec{r}_4, \Phi) \Phi f_F(\vec{r}_4 - \vec{r}_5, \Phi) \times \\
&\quad \times \Phi f_F(\vec{r}_5 - \vec{r}_6, \Phi) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 ds_5 = [\text{Власт. 8}] = \\
&= \Phi^5 \int_{s_2} \int_{s_3} \int_{s_4} \int_{s_5} t_{o1}(\vec{r}_3) t_{o2}(\vec{r}_5) f_F^*(\vec{r}_2; \Phi) f_F(\vec{r}_2, \Phi) f_F(\vec{r}_3, \Phi) f_F(\vec{r}_3, \Phi) \times \\
&\quad \times f_F(\vec{r}_4, \Phi) f_F^*(\vec{r}_4; \Phi) f_F^*(\vec{r}_4; \Phi) f_F^*(\vec{r}_5; \Phi) f_F(\vec{r}_5, \Phi) f_F(\vec{r}_6, \Phi) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_2 \vec{r}_3)] \times \\
&\quad \times \exp[-jk\Phi(\vec{r}_3 \vec{r}_4)] \exp[-jk\Phi(\vec{r}_4 \vec{r}_5)] \exp[-jk\Phi(\vec{r}_5 \vec{r}_6)] \times \\
&\quad \times \int_{s_1} \delta(\vec{r}_1) f_F(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \Phi) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 ds_5 = [\text{Власт. 3, 4}] = \\
&= \Phi^5 f_F(\vec{r}_6, \Phi) \int_{s_2} \int_{s_3} \int_{s_4} \int_{s_5} t_{o1}(\vec{r}_3) t_{o2}(\vec{r}_5) f_F(\vec{r}_2, \Phi) f_F(\vec{r}_3, 2\Phi) f_F(\vec{r}_4, \Phi) \times \\
&\quad \times f_F(\vec{r}_5, \Phi) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_2 \vec{r}_3)] \exp[-jk\Phi(\vec{r}_3 \vec{r}_4)] \exp[-jk\Phi(\vec{r}_4 \vec{r}_5)] \times \\
&\quad \times \exp[-jk\Phi(\vec{r}_5 \vec{r}_6)] ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 = \Phi^5 f_F(\vec{r}_6, \Phi) \int_{s_3} \int_{s_5} t_{o1}(\vec{r}_3) f_F(\vec{r}_3, 2\Phi) \times \\
&\quad \times t_{o2}(\vec{r}_5) f_F(\vec{r}_5, \Phi) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_5 \vec{r}_6)] \int_{s_2} f_F(\vec{r}_2, \Phi) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_2 \vec{r}_3)] ds_2 \times \\
&\quad \times \int_{s_4} f_F(\vec{r}_4, \Phi) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_4(\vec{r}_3 + \vec{r}_5))] ds_4 ds_5 ds_3 = [\text{Власт. 9}] = \\
&= \Phi^3 f_F(\vec{r}_6, \Phi) \int_{s_3} \int_{s_5} t_{o1}(\vec{r}_3) f_F(\vec{r}_3, 2\Phi) f_F^*(\vec{r}_3; \Phi) f_F^*(\vec{r}_3 + \vec{r}_5; \Phi) t_{o2}(\vec{r}_5) \times \\
&\quad \times f_F(\vec{r}_5, \Phi) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_5 \vec{r}_6)] ds_5 ds_3 = [\text{Власт. 9}] = \Phi^3 f_F(\vec{r}_6, \Phi) \times \\
&\quad \times \int_{s_3} \int_{s_5} t_{o1}(\vec{r}_3) f_F(\vec{r}_3, \Phi) f_F^*(\vec{r}_3; \Phi) f_F^*(\vec{r}_5; \Phi) f_F(\vec{r}_5, \Phi) t_{o2}(\vec{r}_5) \times \\
&\quad \times \exp[-jk\Phi(\vec{r}_5 \vec{r}_6)] ds_5 ds_3 = [\text{Власт. 4}] = \Phi^3 f_F(\vec{r}_6, \Phi) \times \\
&\quad \times \int_{s_5} t_{o2} \exp[-jk\Phi(\vec{r}_5 \vec{r}_6)] \int_{s_3} t_{o1}(\vec{r}_3) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_3 \vec{r}_5)] ds_3 ds_5 = \\
&= \Phi^3 f_F(\vec{r}_6, \Phi) \int_{s_5} \tilde{t}_{o1}(\vec{r}_5) t_{o2}(\vec{r}_5) \exp[-jk\Phi(\vec{r}_5 \vec{r}_6)] ds_5.
\end{aligned}$$

В отриманому виразі інтеграл по площині являє собою перетворення Фур'є від добутку функцій $\tilde{t}_{o1}(\vec{r}_5)$ і $t_{o2}(\vec{r}_5)$. Застосувавши теорему згортки до цього інтеграла отримаємо

$$V_6(x_6, y_6) = \Phi^3 f_F(\vec{r}_6, \Phi) \int_{s_3} t_{o1}(\vec{r}_3) \tilde{t}_{o2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_6) ds_3.$$

Тоді розподіл інтенсивності у площині $x_6 y_6$ буде визначатися функцією

$$I_6(x_6, y_6) = |V_6|^2 = \Phi^6 \left| \int_{s_3} t_{o1}(\vec{r}_3) \tilde{t}_{o2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_6) dx_3 dy_3 \right|^2.$$

Отримана функція $I_6(x_6, y_6)$ показує, що досліджувана оптична система діє як лінійний фільтр просторових частот з імпульсним відгуком $\tilde{t}_{o2}(\vec{r}_3)$ і передавальною функцією $t_{o2}(\vec{r}_5/\lambda f)$.

3.5. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1.* Амплітудний коефіцієнт пропускання екрана описується функцією, що має осьову симетрію,

$$t_o(r) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\alpha r^2)] \text{circ}\left(\frac{r}{l}\right).$$

Доведіть, що такий екран діє подібно до лінзи. Знайдіть фокусну відстань цієї лінзи. Які особливості можуть сильно обмежити застосування цього екрана як системи, яка створює зображення, особливо для поліхроматичних предметів?

Вказівка. Скористайтесь прикладами 3.1 та 3.2.

Відповідь: $f = \frac{\pi}{\alpha \lambda}$.

Задача 3.2.* Плоский екран з амплітудним коефіцієнтом пропускання

$$t_o(r) = \frac{1}{2} [1 + \text{sng}(\cos \alpha r^2)] \text{circ}\left(\frac{r}{l}\right)$$

(де $\text{sng}(z)$ функція знака) освітлений монохроматичною плоскою хвилею одиничної амплітуди,

$$\text{sng}(z) = \begin{cases} 1, & \text{коли } z > 0; \\ 0, & \text{коли } z = 0; \\ -1, & \text{коли } z < 0 \end{cases}$$

Доведіть, що такий екран діє як лінза із множиною фокусних відстаней. Визначте значення цих фокусних відстаней і відносні значення енергії, яка переноситься через фокус у відповідні фокальні площини. Екран, що розглядається, називають *зонною пластиною Френеля*.

Вказівка. Скористайтесь прикладами 3.1 та 3.2.

Відповідь: $f_m = \frac{\pi}{\alpha \lambda (2m+1)}$; $\frac{I_m}{I_1} = \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$.

Задача 3.3*. Амплітудний коефіцієнт пропускання зонно-лінзової ґратки визначають за виразом $t_o(x, y) = [1 + \cos(\alpha x^2)]/2$ для всіх y , де α – постійний параметр ґратки.

Доведіть, що таке пропускання можна отримати за допомогою трьох лінз: сферичної, увігнутої та опуклої циліндричних. Визначте відповідні фокусні відстані зонно-лінзової ґратки. Знайдіть розподіл поля у задній фокальній площині зонно-лінзової ґратки, якщо вона освітлюється нормально падаючою плоскою монохроматичною хвилею.

Відповідь: $f_1 = \frac{\pi}{\alpha \lambda}$ $I(x_0, y_0) = I_0[\exp(-\alpha x_0^2)]$.

Задача 3.4. Плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди нормально падає на додатну лінзу, діаметр якої становить 5 см, а фокусна відстань 2 м (рис. 3.21). На відстані 1 м за лінзою на її осі розміщено предмет, амплітудний коефіцієнт пропускання якого

$$t_o(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi \nu_0 x) \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l}\right).$$

Знайдіть розподіл інтенсивності у фокальній площині лінзи. Побудуйте графік цього розподілу вздовж осі x , якщо $\nu_0 = 100 \text{ см}^{-1}$, а $l = 1 \text{ м}$.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 3.3.

Відповідь:
$$I(x_4, y_4) = \left(\frac{\pi D_p^2}{\lambda f}\right)^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2}\right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} \nu_0)^2 + y_4^2}\right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} \nu_0)^2 + y_4^2}} \right]^2 + \frac{1}{16} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} \nu_0)^2 + y_4^2}\right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} \nu_0)^2 + y_4^2}} \right]^2 \right\}.$$

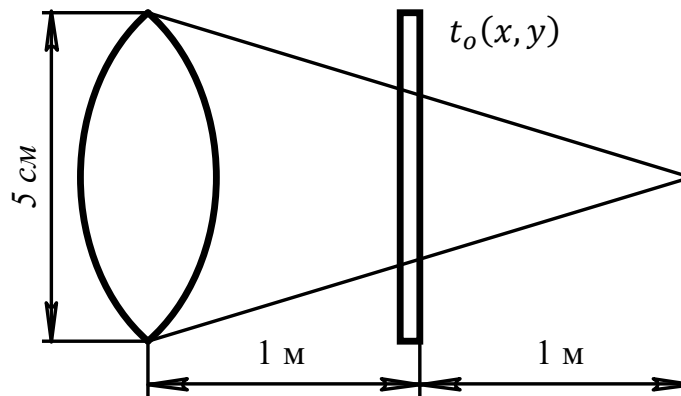


Рис. 3.21. До задачі 3.4

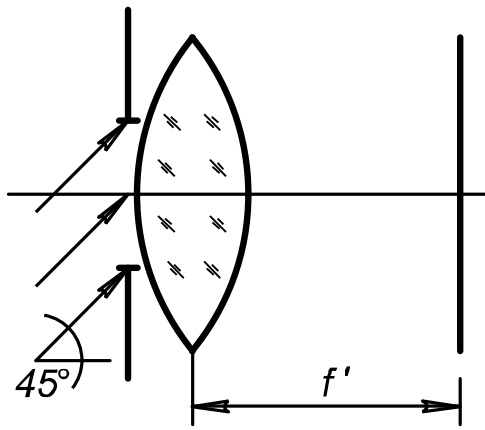


Рис.3.22. До задачі 3.5

Задача 3.5. Плоска монохроматична хвиля падає під кутом 45° на екран, який має отвір у вигляді великої щілини (рис. 3.22). Додатна лінза розміщена безпосередньо за екраном. Визначте дифракційну картину в задній фокальній площині лінзи.

Відповідь : $I_n(y_4) = \text{sinc}^2 \left[\frac{b}{\lambda f'} (y_4 - f') \right]$.

Задача 3.6*. У передній фокальній площині об'єктива з фокусною відстанню $f = 100$ мм встановлено круглу діафрагму з радіусом r_o . Діафрагма освітлюється гауссовим лазерним пучком, який має у площині діафрагми діаметр $2\omega_l$. Визначте розподіл інтенсивності у задній фокальній площині об'єктива. Побудуйте графік цього розподілу, якщо довжина хвилі випромінювання лазера $\lambda = 0,63$ мкм; $r_o = 2$ мм; $\omega_l = 2$ мм або $\omega_l = 4$ мм. Порівняйте отримані результати для випадку рівномірного освітлення діафрагми. Визначите радіус кружка Ейрі.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 3.2.

Відповідь:

$$I(r_4) = |V(r_4)|^2 = \left(\frac{V_0 \pi^2 \omega_l^2 r_o^2}{\lambda f} \right)^2 \left\{ \exp \left[- \left(\frac{2\pi \omega_l}{\lambda f} \right)^2 r_4^2 \right] * \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4 \right)}{\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4} \right] \right\}^2.$$

Задача 3.7. У передній фокальній площині об'єктива з фокусною відстанню $f = 100$ мм розміщено сітку, коефіцієнт пропускання якої знаходять за виразом

$$t_o(x, y) = \frac{1}{2} \text{rect} \left(\frac{x}{A} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{B} \right) \begin{cases} 1, & \text{коли } 2na \leq x \leq (2n+1)a; \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N$.

Визначте розподіл освітленості у задній фокальній площині об'єктива, якщо на ґратку нормально падає плоска монохроматична хвиля довжиною $\lambda = 0,5$ мкм. Побудуйте графіки нормованого розподілу інтенсивності уздовж осей x та y , якщо $A = 20$ мм, $B = 10$ мм, $a = 0,5$ мм.

$$\text{Відповідь: } I(x_4, y_4) = \left(\frac{V_p}{\lambda_f}\right)^2 [(2N+1)aB]^2 \left\{ \frac{\text{sinc}\left[\frac{2a}{\lambda_f}(2N+1)x_4\right]}{\cos\left[\frac{\pi a}{\lambda_f}x_4\right]} \right\}^2 \text{sinc}^2\left(\frac{B}{\lambda_f}y_4\right).$$

Задача 3.8. За еквівалентною операторною схемою, що представлена на рис. 3.23, побудуйте відповідну оптичну систему.

Задача 3.9. Оптична система складається із двох сферичних додатних лінз L_1 і L_2 з фокусними відстанями f_1 і f_2 відповідно. На лінзу L_1 нормально падає плоска монохроматична хвиля. Визначте відстань d між лінзами, за якої на виході системи формується плоска монохроматична хвиля.

$$\text{Відповідь: } d = f_1 + f_2.$$

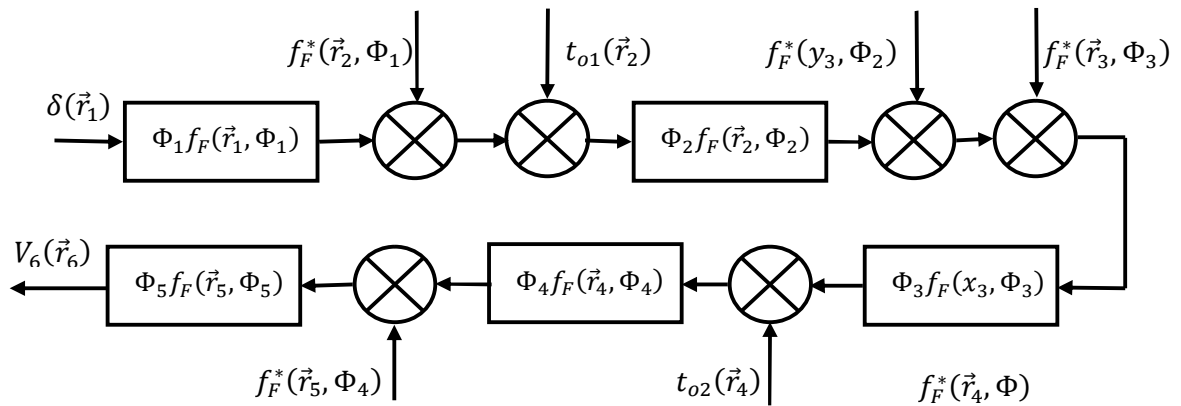


Рис. 3.23. Операторна схема до задачі 3.8

Задача 3.10. Оптична система складається із сферичних від'ємної лінзи L_1 з фокусною відстанню f_1 і додатної лінзи L_2 з фокусною відстанню f_2 відповідно. На лінзу L_1 нормально падає монохроматична хвиля. Визначте відстань d між лінзами, за якої на виході системи формується плоска монохроматична хвиля.

$$\text{Відповідь: } d = f_1 - f_2.$$

Задача 3.11. Порівняйте дію оптичної системи, яка наведена на рис. 3.24, з роботою оптичного каскаду, що формує зображення, який було розглянуто в п. 3.3. Схема складається із двох сферичних лінз з однаковою фокусною відстанню f , а вхідна площина оптичної системи освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди.

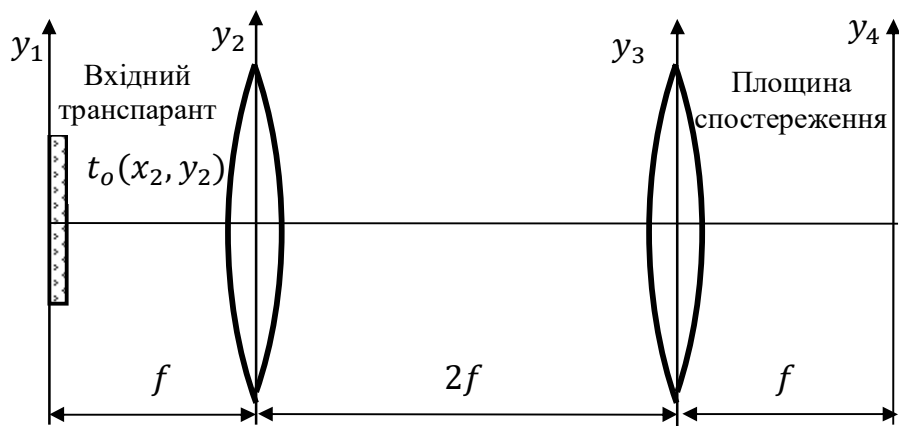


Рис. 3.24. Оптична система до задачі 3.11

Задача 3.12. Використовуючи операторний метод проаналізуйте дію оптичної системи, яка наведена на рис. 3.25. Точкове джерело когерентного випромінювання розташоване у площині x_1y_1 , а сферична лінза має фокусну відстань f . Знайдіть розподіл амплітуди і інтенсивності поля у площині спостереження x_4y_4 .

Відповідь: $V_4(x_4, y_4) = \Phi^2 \int_{s_3} t_{o1}(\vec{r}_3) \tilde{t}_{o2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) dx_3 dy_3$

$$I_4(x_4, y_4) = |V_4|^2 = \Phi^4 \left| \int_{s_3} t_{o1}(\vec{r}_3) \tilde{t}_{o2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) dx_3 dy_3 \right|^2.$$

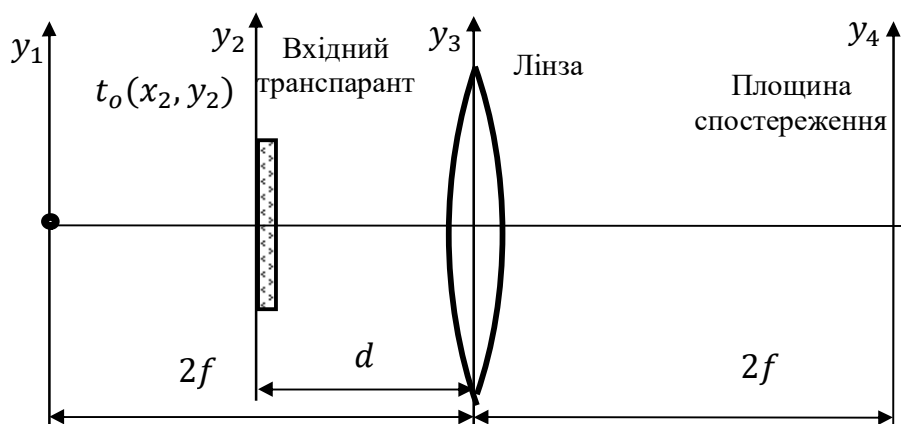


Рис. 3.25. Оптична система до задачі 3.12

Задача 3.13. Знайдіть розподіл інтенсивності світла на виході оптичної системи, яка наведена на рис. 3.26. Точкове джерело когерентного випромінювання розташоване на оптичній осі у площині x_1y_1 . Три сферичні лінзи мають однакову фокусну відстань f . Два транспаранта мають

амплітудні коефіцієнти пропускання $t_{o1}(x_2, y_2)$ і $t_{o2}(x_4, y_4)$. У вихідній площині $x_6 y_6$ розташований непрозорий екран з точковим отвором на оптичній осі.

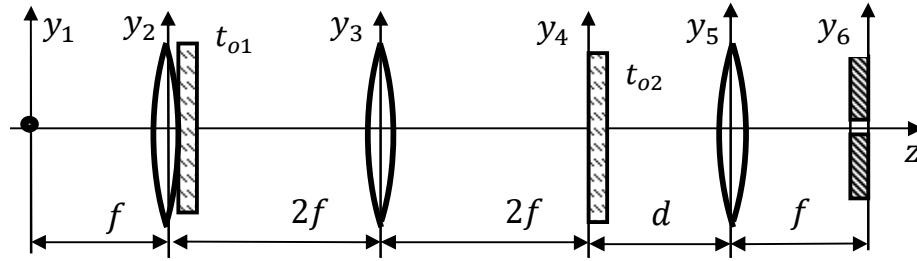


Рис. 3.26. Оптична схема до прикладу 3.13

Задача 3.14. Знайдіть розподіл інтенсивності світла на виході оптичної системи, яка наведена на рис. 3.27. До складу оптичної системи входять: вхідний транспарант з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_1, y_1)$, від'ємна циліндрична лінза з фокусною відстанню $f = f_x$, додатна сферична лінза з фокусною відстанню $f/2$. Вхідна площина освітлюється плоскою монохроматичною хвилею когерентного світла одиничної амплітуди. Порівняйте результат з прикладом 3.5.

Відповідь: $I_3(x_3, y_3) = I_3(x_3, y_3) = \Phi^2 \left| \int_{S_2} t_{o1}(\vec{r}_2) \tilde{t}_{o2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) dx_2 dy_2 \right|^2$

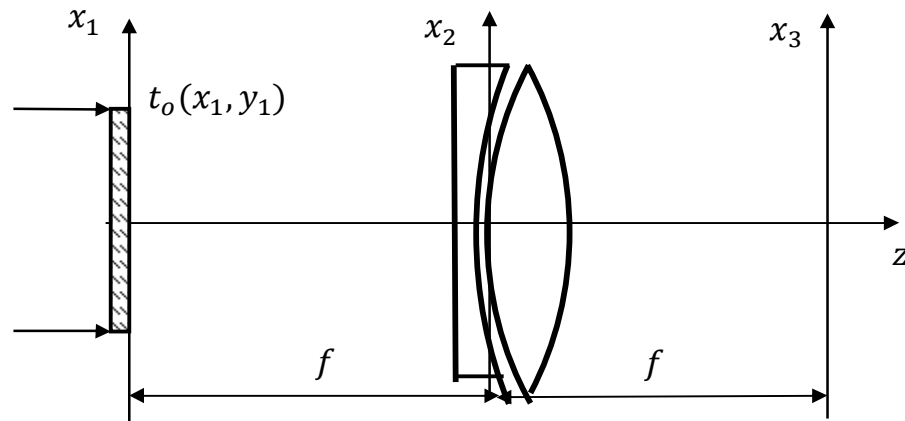


Рис. 3.27. Оптична схема до задачі 3.14

Задача 3.15. Знайдіть розподіл інтенсивності світла на виході оптичної системи, яка наведена на рис. 3.28. До складу оптичної системи входять: вхідний транспарант з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_1, y_1)$,

додатна циліндрична лінза з фокусною відстанню $f = f_x$ і додатна циліндрична лінза з фокусною відстанню $f_y = f/2$, які розташовані у площині x_2y_2 . Вхідна площина x_1y_1 освітлюється плоскою монохроматичною хвилею когерентного світла одиничної амплітуди.

Відповідь:
$$I_3(x_3, y_3) = \Phi^2 \left| \int_{s_2} t_{o1}(\vec{r}_2) \tilde{t}_{o2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) dx_2 dy_2 \right|^2.$$

Задача 3.16. Знайдіть розподіл інтенсивності світла на виході оптичної системи, яка складається з послідовно з'єднаних каскадів, що формують зображення і просторовий спектр (рис. 3.29). Схема складається із двох сферичних лінз з однаковою фокусною відстанню f , а вхідна площина оптичної системи освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди. Які допоміжні зміни необхідно внести до цієї оптичної системи, не змінюючи відстані між її елементами, щоб розподіл амплітуди світла у вихідній площині в точності відповідав перетворенню Фур'є від амплітудного пропускання транспаранта?

Відповідь:
$$I_5(x_5, y_5) = \Phi^2 \left| \int_{s_2} t_{o1}(\vec{r}_2) \tilde{t}_{o2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_5) dx_2 dy_2 \right|^2$$

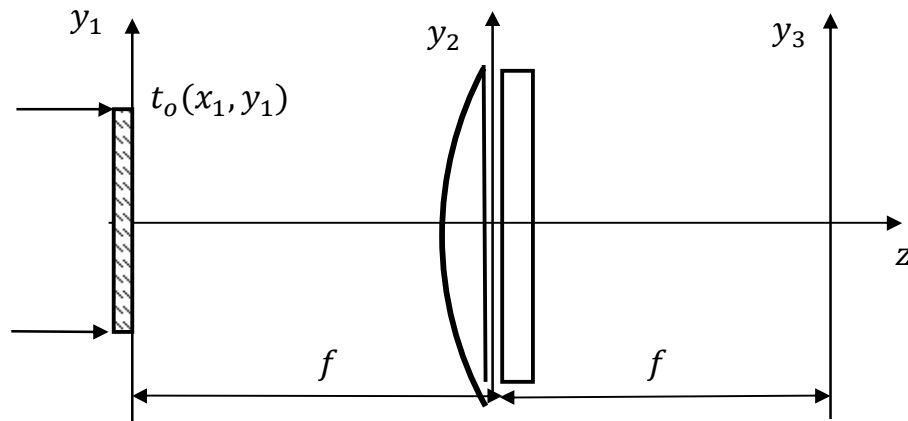


Рис. 3.28. Оптична схема до задачі 3.15

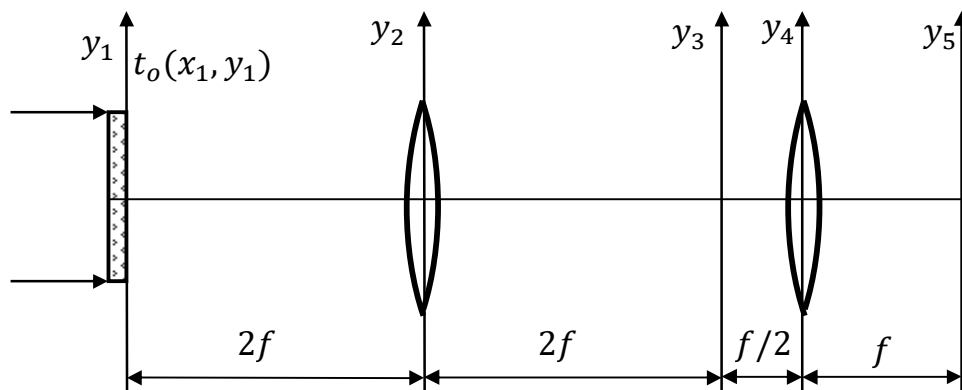


Рис. 3.29. Оптична система до задачі 3.16

Задача 3.17. Знайдіть розподіл інтенсивності світла на виході оптичної системи, яка наведена на рис. 3.30. До складу оптичної системи входять: вхідний транспарант з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_1, y_1) = t_o(x_1)t_o(y_1)$, додатна циліндрична лінза з фокусною відстанню $f_1 = f_y$ і додатна циліндрична лінза з фокусною відстанню $f_2 = f_x$. Вхідна площина x_1y_1 освітлюється плоскою монохроматичною хвилею когерентного світла одиничної амплітуди.

Відповідь:
$$I_4(x_4, y_4) = |V_4|^2 = \Phi^4 \left| \int_{s_3} t_{o1}(\vec{r}_3) \tilde{t}_{o2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) dx_3 dy_3 \right|^2.$$

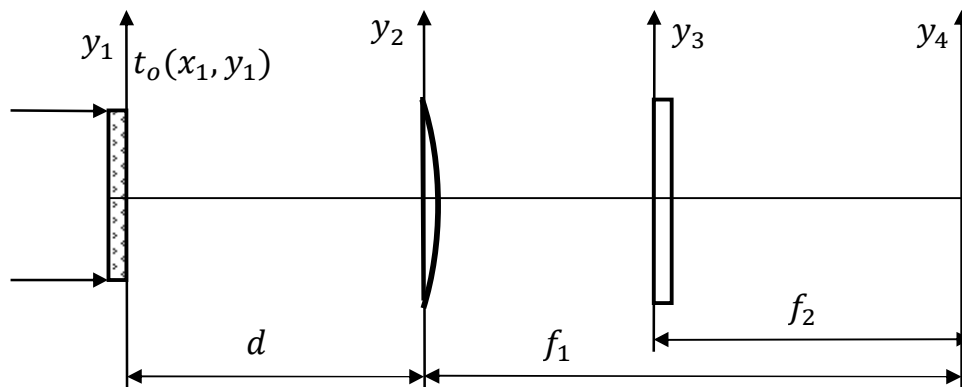


Рис. 3.30. Оптична система до задачі 3.17

Розділ 4. ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ ДИФРАКЦІЙНО ОБМЕЖЕНИХ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

Просторово-частотний аналіз оптичних систем почали застосовувати наприкінці 30-х років XX ст., коли стали використовувати синусоїдальні міри для аналізу та розрахунку систем. Цими роботами зацікавились завдяки застосуванню теорії лінійних систем і теорії зв'язку для аналізу й удосконалення об'єктивів телевізійних камер. Однак методи Фур'є-оптики були закладені ще в роботах Аббе (1840–1905) і Релея (1842–1913).

Розглянемо застосування методів просторово-частотного аналізу оптичних систем, в яких немає аберації, для випадків когерентного й некогерентного випромінювання.

4.1. Узагальнена модель оптичної системи, яка формує зображення

У підрозділі 3.3 було розглянуто дифракційну теорію формування зображення тонкою додатною лінзою в умовах монохроматичного освітлення. Реальна оптична система складається, зазвичай, із додатних і від'ємних лінз. Розглянемо оптичні системи, які формують зображення (об'єктив, проєкційну систему, мікроскоп–око, телескоп–око). Для аналізу властивостей складних оптичних систем доцільно ввести поняття узагальненої моделі оптичної системи.

Схему формування зображення в довільній оптичній системі зображено на рис. 4.1. Перехід від реальної системи до узагальненої моделі відбувається заміною сукупності лінз формальною системою, яка перетворює вхідний сигнал у вихідний. При цьому як вхідний сигнал розглядається розподіл поля у вхідній зіниці, а вихідним сигналом служить розподіл поля у вихідній зіниці.

Вхідна зіниця являє собою отвір обмежених розмірів (уявний або дійсний), через який проходить випромінювання і потрапляє на оптичні елементи, що формують зображення. *Вихідна зіниця* являє собою отвір

обмежених розмірів (уявний або дійсний), через який випромінювання виходить із оптичної системи і формує зображення.

Вважатимемо, що поширення випромінювання від вхідної зіниці до вихідної з достатньою точністю описує геометрична оптика, що не потребує врахування дифракційних ефектів. Дифракційні ефекти слід враховувати тільки на шляху від об'єкта до вхідної зіниці (згідно з теорією Аббе) або від вихідної зіниці до площини зображення (теорія Релея). Надалі вплив дифракційних ефектів будемо враховувати на шляху від вихідної зіниці до зображення. Зазначимо також, що вихідна зіниця оптичної системи є зображенням вхідної зіниці, і навпаки.

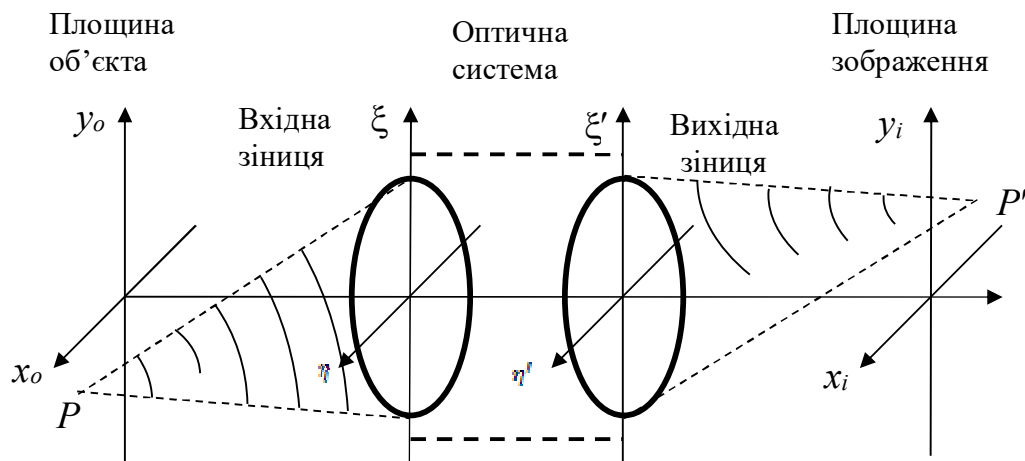


Рис. 4.1. Узагальнена модель оптичної системи, яка формує зображення

Тоді відповідно до загального визначення системи узагальнену модель можна подати формально у вигляді деякого блока (зображено на рис. 4.1 пунктиром), який здійснює перетворення розподілу поля у площині вхідної зіниці у розподіл поля у площині вихідної зіниці. З таким блоком можна пов'язати деякий математичний оператор, який описує з позиції геометричної оптики перетворення хвильового фронту під час переходу від вхідної зіниці до вихідної.

Якщо довжина оптичного шляху кожного променя, який виходить із точки P , проходить через всю оптичну систему і потрапляє в точку P' , залишається незмінною, то із вихідної зіниці поширюватиметься сферична

хвиля, яка сходиться в точці P' (рис. 4.1). У цьому випадку в оптичній системі немає аберацій, а саму систему називають дифракційно обмеженою.

Отже, під *дифракційно обмеженою оптичною системою* будемо розуміти таку систему, яка має обмежений розмір вихідної зіниці і в наближенні геометричної оптики перетворює сферичну хвилю, що розходитьсЯ із будь-якого точкового джерела, в нову ідеальну сферичну хвилю, що сходиться в точці, яка належить площині зображення.

У реальних оптичних системах фронт хвилі від точкового джерела після вихідної зіниці значно відрізняється від ідеальної сферичної форми, тоді в оптичній системі є *аберації*.

Ідеальною оптичною системою називають таку систему, в якій немає аберацій і не враховуються дифракційні ефекти.

4.2. Когерентні й некогерентні оптичні системи

У розділах 2 і 3 зазначалось, що світлова хвиля є строго монохроматичною. Реальні джерела випромінювання не бувають строго монохроматичними. Статистичний характер зміни амплітуди і фази оптичного випромінювання може відчутно впливати на властивості оптичної системи, що створює зображення.

Якщо зміна амплітуди й фази мають випадковий характер, світлове поле можна задовільно описати за допомогою ймовірнісних характеристик. Відомо, що кожна точка об'єкта обумовлює певний імпульсний відгук у площині зображення. Коли амплітуда й фаза в точці об'єкта змінюються випадковим чином, так само буде змінюватися імпульсний відгук у відповідних точках зображення. Тому статистичні залежності між амплітудами в різних точках об'єкта будуть зумовлювати статистичні залежності між відповідними імпульсними відгуками у площині зображення.

Надалі під час вивчення властивостей оптичних систем розглядатимемо тільки два граничні випадки когерентної і некогерентної оптичної системи. При цьому *когерентною оптичною системою* будемо називати систему, в

якій використовується когерентне джерело випромінювання (лазер). *Некогерентною оптичною системою* називатимемо систему, в якій використовується некогерентне випромінювання.

4.2.1. Когерентне випромінювання

Когерентність випромінювання можна визначити як здатність випромінювання формувати стабільну інтерференційну картину. Випромінювання називають *когерентним*, якщо різниця фаз у двох довільних точках залишається незмінною за час спостереження. Якщо в будь-який момент часу різниця фаз залишається незмінною у двох довільних точках простору, то таке випромінювання називають *просторово когерентним*. Якщо дві світлові хвилі, зміщені у часі, складаються в одній точці і при цьому різниця фаз між ними залишається незмінною, то такому випромінюванню властива *часова когерентність*.

Більш строге математичне визначення когерентності можна дати на основі кореляційної функції випромінювання. Простіша із них описує часову когерентність і визначає кореляцію Γ_{11} між комплексними амплітудами поля $V(\vec{r}_1, t)$ та $V(\vec{r}_1, t + \tau)$ в одній і тій самій точці $P(\vec{r}_1)$, але розділеними у часі інтервалом τ :

$$\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t) dt. \quad (4.1)$$

Функція (4.1) являє собою автокореляційну функцію амплітуди поля $V(\vec{r}_1, t)$ або середнє значення добутку $V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t)$, тобто

$$\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \langle V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t) \rangle. \quad (4.2)$$

Знайдемо нормовану автокореляційну функцію, використовуючи (4.2):

$$\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)}{\langle V(\vec{r}_1, t) V^*(\vec{r}_1, t) \rangle} = \frac{\Gamma_{11}}{I(\vec{r}_1)}, \quad (4.3)$$

де $I(\vec{r}_1)$ – інтенсивність випромінювання в точці $P(\vec{r}_1)$.

Можна побачити, що функція (4.3) має такі властивості:

- $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) = 1$;
- $|\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)| \leq 1$;
- $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, -\tau) = \gamma_{11}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$.

Функцію $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$ називають *комплексною мірою часової когерентності*. Модуль цієї функції $|\gamma_{11}|$ називають *мірою часової когерентності*. Очевидно Γ_{11} , а відповідно і γ_{11} , являють собою міру кореляції, яка спостерігається між комплексними амплітудами в одній і тій самій точці простору для двох моментів часу, роз'єднаних інтервалом τ . Якщо часової когерентності зовсім немає, то $\gamma_{11} = 0$. Для випадку повної когерентності, наприклад для нескінченно довгої гармонічної хвилі $V(\vec{r}_1, t) = V_0(\vec{r}_1)\exp(-j2\pi vt)$, $|\gamma_{11}(\tau)| = 1$ для будь-яких значень часового зміщення τ . Функцію $|\gamma_{11}(\tau)|$ подано на рис. 4.2, а. Із графіка функції $|\gamma_{11}(\tau)|$ можна знайти *час когерентності* τ_c , за якого величина $|\gamma_{11}(\tau)|$ зменшується вдвоє, тобто $|\gamma_{11}(\tau_c)| = 0,5$. Для повністю когерентної хвилі $\tau_c = \infty$, а для повністю некогерентної хвилі $\tau_c = 0$.

Аналогічно можна визначити кореляційну функцію світлового поля між двома різними точками $P(\vec{r}_1)$ і $P(\vec{r}_2)$ в один і той самий момент часу:

$$\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \langle V(\vec{r}_1, t) V^*(\vec{r}_2, t) \rangle. \quad (4.4)$$

Відповідна нормована функція із врахуванням (4.4) має вигляд

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \frac{\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0)\Gamma_{22}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}}. \quad (4.5)$$

Функцію (4.5) називають *комплексною мірою просторової когерентності*. Модуль цієї функції $|\gamma_{12}|$ називають *мірою просторової когерентності*. Ця функція має властивості, аналогічні функції γ_{11} . Функцію $|\gamma_{12}|$ зображено на рис. 4.2, б. Якщо координата \vec{r}_1 фіксована, то на деякій характерній довжині $d_c = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ величина $\gamma_{12}(d_c) = 0$. Параметр d_c називають *довжиною просторової когерентності* хвилі у точці $P(\vec{r}_1)$.

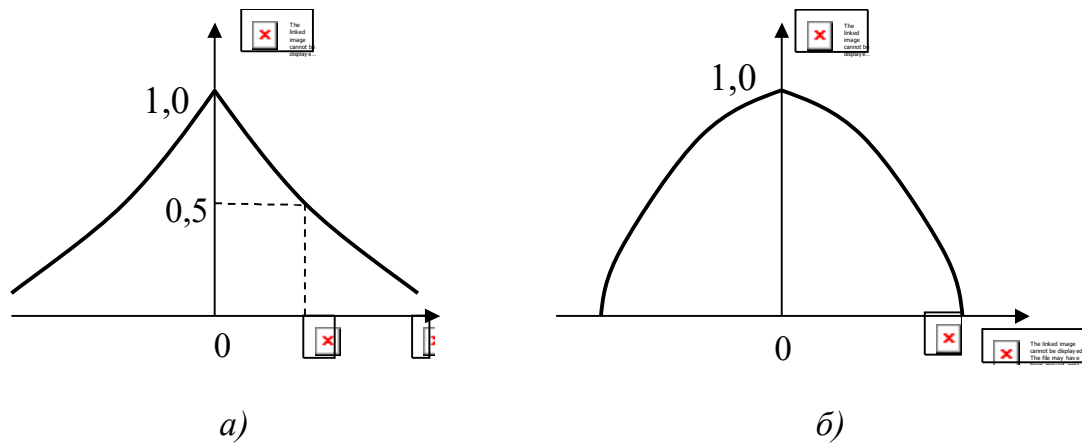


Рис. 4.2. Можливі залежності:

a – міра часової когерентності $|\gamma_{11}|$; *б* – міра просторової когерентності $|\gamma_{12}|$

Поняття просторової і часової когерентності можна об'єднати за допомогою функції взаємної когерентності, яку визначають таким чином:

$$\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_2, t) \rangle, \quad (4.6)$$

яку можна подати також у нормованому вигляді:

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \Gamma_{22}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}}. \quad (4.7)$$

Ця функція, яку називають *комплексною мірою когерентності*, визначає когерентність між двома різними точками хвилі у різні моменти часу.

Поняття часової когерентності тісно пов'язане з монохроматичністю випромінювання. Наприклад, чим більша міра когерентності хвилі, тим більша її монохроматичність. Іншими словами, час когерентності τ_c обернено пропорційний ширині $\Delta\nu$ смуги частот випромінювання, тобто $\tau_c \sim 1/\Delta\nu$.

4.2.2. Вимірювання міри когерентності випромінювання

Найбільш простим способом вимірювання міри просторової когерентності між двома точками світлової хвилі є метод, в якому використовується інтерферометр Юнга (рис. 4.3). Інтерферометр складається з екрана 1, який має отвори (щілини) з координатами x_1 та x_2 , та екрана 2, на якому випромінювання, що пройшло через отвори, утворює інтерференційну картину. Інтерференційні смуги на екрані 2 будуть тим чіткішими, чим краще

зберігаються у фазі дві амплітуди $V(x_1, \tau_1 = d_1/c)$ і $V(x_2, \tau_2 = d_2/c)$, де d_1 і d_2 – відстані від отворів x_1 та x_2 до точки на екрані 2; c – швидкість світла.

Отже, контрастність інтерференційних смуг визначає міру когерентності між точками x_1 і x_2 . Визначимо контрастність смуг $C(P)$ у точці P таким чином:

$$C(P) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (4.8)$$

де I_{max} та I_{min} – максимальна і мінімальна інтенсивності в околі точки P .

Якщо обидва отвори, x_1 і x_2 , створюють однакову освітленість у точці P , а відповідні дві хвилі мають повну просторову і часову когерентність, то $I_{min} = 0$, а контрастність смуг $C(P) = 1$. У випадку, коли випромінювання в точках x_1 та x_2 повністю некогерентне, то $I_{max} = I_{min}$, смуги зникають, а контрастність смуг $C(P) = 0$.

Розрахуємо контрастність смуг для частково когерентного випромінювання. Визначимо інтенсивність поля в точці P як $I(P) = \langle |V(P)|^2 \rangle$, де $V(P)$ – світлове поле, яке утворене випромінюванням, що поширюється із точок x_1 та x_2 , тобто

$$V(P) = V(x_1, \tau_1 = d_1/c) + V(x_2, \tau_2 = d_2/c). \quad (4.9)$$

Тоді з урахуванням виразів (4.6) і (4.9) матимемо:

$$\begin{aligned} I(P) &= \langle |V(x_1, \tau_1 = d_1/c) + V(x_2, \tau_2 = d_2/c)|^2 \rangle = \\ &= \langle |V(x_1, \tau_1 = d_1/c)|^2 \rangle + \langle |V(x_2, \tau_2 = d_2/c)|^2 \rangle + \\ &\quad + \langle V(x_1, \tau_1 = d_1/c) V^*(x_2, \tau_2 = d_2/c) \rangle + \\ &\quad + \langle V^*(x_1, \tau_1 = d_1/c) V(x_2, \tau_2 = d_2/c) \rangle = \\ &= I(x_1) + I(x_2) + \Gamma_{12}^*[x_1, x_2, (d_1 - d_2)/c] + \Gamma_{12}[x_1, x_2, (d_1 - d_2)/c]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Комплексну функцію Γ_{12} подамо у вигляді $\Gamma_{12} = |\Gamma_{12}| e^{j\varphi_{12}}$. Тоді

$$\Gamma_{12}^* + \Gamma_{12} = |\Gamma_{12}| e^{-j\varphi_{12}} + |\Gamma_{12}| e^{j\varphi_{12}} = 2|\Gamma_{12}| \cos \varphi_{12}. \quad (4.11)$$

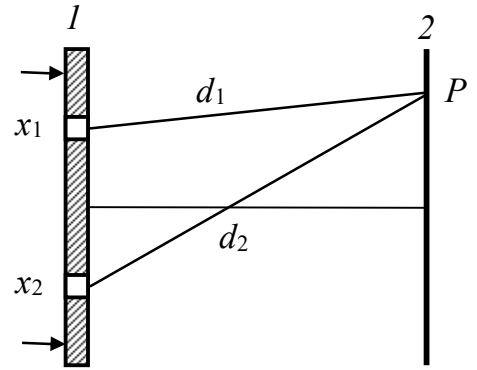


Рис. 4.3. Схема інтерферометра Юнга для вимірювання ступеня просторової когерентності

З урахуванням виразів (4.7), (4.10) та (4.11) інтенсивність в околі точки P має значення

$$I_{max} = I(x_1) + I(x_2) + 2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|; \quad (4.12)$$

$$I_{min} = I(x_1) + I(x_2) - 2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|. \quad (4.13)$$

Після підстановки інтенсивностей (4.12) і (4.13) у формулу (4.8) маємо:

$$C(P) = \frac{2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}}{I(x_1)+I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|. \quad (4.14)$$

Якщо $I(x_1) = I(x_2)$, то $C(P) = |\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|$. При цьому, коли $d_1 = d_2$, тобто $\tau = 0$, вираз (4.14) визначає міру просторової когерентності між точками x_1 та x_2 .

Часову когерентність найбільш просто можна виміряти за допомогою інтерферометра Майкельсона (рис. 4.4).

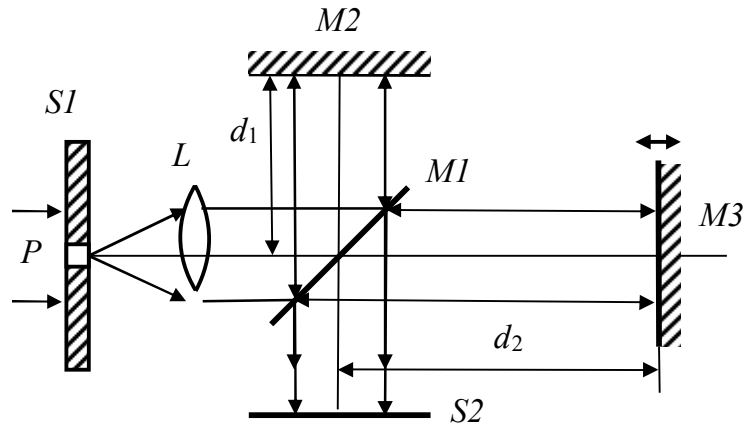


Рис. 4.4. Інтерферометр Майкельсона для вимірювання ступеня часової когерентності у точці P

Схема установки складається з екрана $S1$ з невеликим отвором у точці P , яка збігається з переднім фокусом лінзи L . Лінза перетворює сферичну хвилю у плоску. Ця хвиля, проходячи через напівпрозору пластину $M1$, розділяється на два паралельних пучка, які після відбивання від дзеркал $M2$ і $M3$ за допомогою пластини $M1$ знову поширюються в одному напрямку. На екрані $S2$ буде спостерігатись інтерференційна картина у вигляді концентричних кілець. Очевидно, що така інтерференція спостерігатиметься тільки доти, поки різниця $2(d_1 - d_2)$ не збільшиться настільки, що обидва пучки стануть

некорельованими по фазі. Як і з інтерферометром Юнга, можна вважати, що контрастність інтерференційної картини

$$C(P) = |\gamma_{11}(P, P, \tau)|, \quad (4.15)$$

де $\tau = 2(d_1 - d_2)/c$.

Отже, вимірювання контрастності інтерференційних кілець (4.15) дає змогу отримати міру часової когерентності випромінювання у точці P . Можна також знайти довжину часової когерентності $d_{ct} = c\tau_c$, для якої $C(P) = |\gamma_{11}(P, P, \tau_c)| = 0,5$.

4.2.3. Некогерентне випромінювання

Якщо амплітуда і фаза світлового поля у довільних точках простору в певний момент часу змінюються за статистично незалежними законами, то таке випромінювання називають *некогерентним*. Реальні джерела випромінювання, крім лазерів, є некогерентними, а їх комплексна міра когерентності $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$ близька до нуля. Некогерентне випромінювання не може бути строго монохроматичним.

Для повністю некогерентного випромінювання з $\Gamma_{12} = 0$ інтенсивність двох світлових хвиль у точці P згідно з (4.10) становить

$$I(P) = I(\vec{r}_1) + I(\vec{r}_2). \quad (4.16)$$

4.3. Дифракційно обмежена когерентна оптична система

У когерентній оптичній системі різні імпульсні відгуки у площині зображення змінюються одночасно і, як наслідок, їх комплексні амплітуди поля мають додаватися, оскільки їх фази строго узгоджені між собою. Тому когерентна оптична система, що формує зображення, буде лінійною відносно комплексних амплітуд поля.

Використовуючи результати параграфу 3.3.3, які були отримані для монохроматичного випромінювання, амплітуду поля $V_i(x_i, y_i)$ у площині зображення когерентної системи можна подати у вигляді неперервної суми зважених імпульсних відгуків $h_n(x_i, y_i)$:

$$V_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_n(x_i - x_{io}, y_i - y_{io}) V_{ig}(x_{io}, y_{io}) dx_{io} dy_{io}. \quad (4.17)$$

Вираз (4.17) встановлює зв'язок між вихідним полем $V_i(x_i, y_i)$ когерентної просторово-інваріантної системи та ідеальним зображенням $V_{ig}(x_{io}, y_{io})$ цієї системи (див. вираз (3.71)). Він являє собою згортку імпульсного відгуку h_n та ідеального зображення V_{ig} , що дозволяє розглядати таку систему в області просторових частот.

Застосовуючи теореми згортки до виразу (4.17) [6], знаходимо, що

$$\tilde{V}_i(v_x, v_y) = H(v_x, v_y) \tilde{V}_{ig}(v_x, v_y), \quad (4.18)$$

де $\tilde{V}(v_x, v_y)$ та $\tilde{V}_{ig}(v_x, v_y)$ – просторово-частотні спектри розподілу амплітуди поля у площині зображення реальної та ідеальної оптичних систем,

$$\tilde{V}_i(v_x, v_y) = F\{V_i\} = \iint_{-\infty}^{\infty} V_i(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i; \quad (4.19)$$

$$\tilde{V}_{ig}(v_x, v_y) = F\{V_{ig}\} = \iint_{-\infty}^{\infty} V_{ig}(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i; \quad (4.20)$$

$H(v_x, v_y)$ – когерентна передавальна функція (КПФ) системи, яка являє собою перетворення Фур'є просторово-інваріантного когерентного імпульсного відгуку (функції розсіювання точки) h_n ;

$$H(v_x, v_y) = F\{h_n\} = \iint_{-\infty}^{\infty} h_n(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i; \quad (4.21)$$

$F\{\}$ – оператор перетворення Фур'є.

Встановимо зв'язок між КПФ і фізичними властивостями оптичної системи. Згідно з (3.70)

$$h_n(x_i, y_i) = F\{P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y)\}, \quad (4.22)$$

де P – функція вихідної зіниці системи (3.38); λ – довжина хвилі монохроматичного випромінювання; a' – відстань від вихідної зіниці до площини зображення. Інакше кажучи, імпульсний відгук являє собою перетворення Фур'є від функції вихідної зіниці.

Підставимо співвідношення (4.22) в інтеграл (4.21):

$$H(v_x, v_y) = F\{h_n\} = F\{F\{P\}\} = P(-\lambda a' v_x, -\lambda a' v_y). \quad (4.23)$$

Функція (4.23) описує частотні властивості дифракційно обмеженої когерентної оптичної системи. Оскільки згідно із системою (3.38) функція зіниці завжди дорівнює одиниці або нулю, то і КПФ має аналогічні властивості. Це означає, що в області просторових частот дифракційно обмежена когерентна система має обмежену смугу пропускання, у межах якої усі частотні складові пропускаються без спотворення амплітуди та фази. На межі цієї смуги пропускання КПФ відразу падає до нуля, а частотні складові за межами смуги пропускання повністю зникають.

Із функції (4.23) маємо, що КПФ являє собою дзеркальну функцію вихідної зіниці $P(-\xi', -\eta')$, в якій координати ξ' та η' замінюються на $\lambda a' v_x$ та $\lambda a' v_y$. Оскільки більшість оптичних систем мають вісь симетрії, то від'ємні знаки аргументів у функції (4.23) не мають істотного значення, тобто

$$H(v_x, v_y) = P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y). \quad (4.24)$$

Як приклад визначимо КПФ дифракційно обмеженої системи з прямокутною і круглою вихідними зіницями, для яких

$$P(\xi', \eta') = \begin{cases} 1, \text{ коли } |\xi'| \leq \frac{a}{2}, |\eta'| \leq \frac{b}{2}; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad (4.25)$$

$$P(\xi', \eta') = \begin{cases} 1, \text{ коли } \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} \leq R_p; \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \quad (4.26)$$

де $a \times b$ – розмір прямокутної зіниці; R_p – радіус вихідної зіниці.

Тоді відповідно до виразу (4.24) КПФ таких систем описується виразами

$$H(v_x, v_y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } |v_x| \leq \frac{a}{2\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{2\lambda a'}; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$H(v_x, v_y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \leq R_p / \lambda a'; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.28)$$

Графіки функцій (4.27) та (4.28) зображено на рис. 4.5. Із графіків видно, що в обох випадках існує гранична частота пропускання. Для оптичної системи з круглою вихідною зіницею маємо:

$$v_{r,max} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R_p / 2\lambda a'. \quad (4.29)$$

Наприклад, якщо $R_p = 5 \text{ мм}$, $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$, $a' = 100 \text{ мм}$, то $v_{r,max} = 100 \text{ мм}^{-1}$.

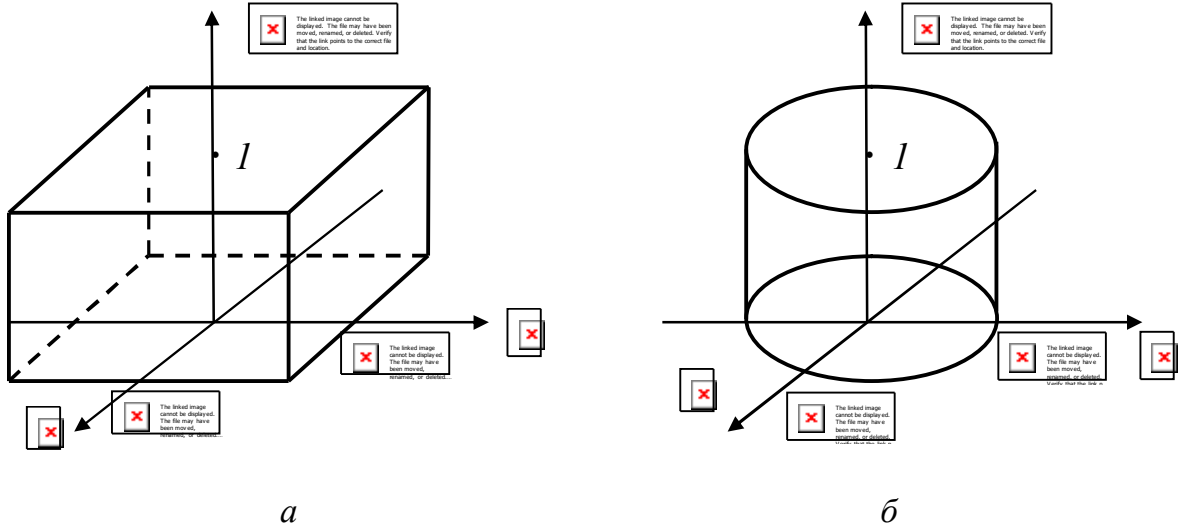


Рис. 4.5. Когерентні передавальні функції дифракційно обмежених оптичних систем з прямокутною (а) і круглою (б) вихідними зіницями

4.4. Дифракційно обмежена некогерентна оптична система

У некогерентній оптичній системі різні імпульсні відгуки у площині зображення змінюються за статистично незалежними законами і, як наслідок, повинні сумуватися їх інтенсивності $|h_n|^2$. Оскільки інтенсивність кожного некогерентного імпульсного відгуку пропорційна інтенсивності світла в точці об'єкта, що формує цей імпульсний відгук, то в некогерентній системі розподіл інтенсивності $I_i(x_i, y_i)$ у площині зображення являє собою зважену неперервну суму (4.16) некогерентних імпульсних відгуків $|h_n|^2$, тобто

$$\begin{aligned} I_i(x_i, y_i) &= \langle |V_i(x_i, y_i)|^2 \rangle = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i - x_{io}, y_i - y_{io})|^2 I_{ig}(x_{io}, y_{io}) dx_{io} dy_{io}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

де $I_{ig}(x_i, y_i)$ – розподіл інтенсивності в ідеальному зображенні,

$$I_{ig}(x_i, y_i) = \langle |V_{ig}(x_i, y_i)|^2 \rangle.$$

Отже, некогерентна оптична система є лінійною відносно інтенсивності. Крім того, інтенсивність зображення визначається як згортка інтенсивності ідеального зображення та імпульсного відгуку $|h_n|^2$.

4.4.1. Оптична передавальна функція та її основні властивості

Застосуємо теорему згортки до інтеграла (4.30). Тоді

$$\tilde{I}_i(v_x, v_y) = G(v_x, v_y) \tilde{I}_{ig}(v_x, v_y), \quad (4.31)$$

де $\tilde{I}_i(v_x, v_y)$, $\tilde{I}_{ig}(v_x, v_y)$ – просторово-частотні спектри розподілу інтенсивності поля у площині зображення реальної та ідеальної оптичних систем,

$$\tilde{I}_i(v_x, v_y) = F\{I_i\} = \iint_{-\infty}^{\infty} I_i(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i, \quad (4.32)$$

$$\tilde{I}_{ig}(v_x, v_y) = F\{I_{ig}\} = \iint_{-\infty}^{\infty} I_{ig}(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i; \quad (4.33)$$

$G(v_x, v_y)$ – передавальна функція некогерентної просторово-інваріантної оптичної системи,

$$G(v_x, v_y) = F\{|h_n|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i. \quad (4.34)$$

Подамо співвідношення (4.31) з урахуванням (4.32)–(4.34) у нормованому вигляді:

$$\tilde{I}_{in}(v_x, v_y) = G_n(v_x, v_y) \tilde{I}_{ign}(v_x, v_y), \quad (4.35)$$

де $\tilde{I}_{in}(v_x, v_y)$ та $\tilde{I}_{ign}(v_x, v_y)$ – нормовані просторово-частотні спектри реального та ідеального зображення,

$$\tilde{I}_{in}(v_x, v_y) = \frac{\tilde{I}_i(v_x, v_y)}{\tilde{I}_i(0,0)}; \quad \tilde{I}_{ign}(v_x, v_y) = \frac{\tilde{I}_{ig}(v_x, v_y)}{\tilde{I}_{ig}(0,0)}; \quad (4.36)$$

$G_n(v_x, v_y)$ – оптична передавальна функція (ОПФ),

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i}{\iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i}. \quad (4.37)$$

Вираз (4.37) для ОПФ у загальному випадку є комплексною функцією, яку можна подати у вигляді

$$G_n(v_x, v_y) = M(v_x, v_y) \exp[j\Phi(v_x, v_y)]. \quad (4.38)$$

Модуль ОПФ (4.38) $M(v_x, v_y) = |G_n(v_x, v_y)|$ називають *модуляційною передавальною функцією* оптичної системи. Функцію $\Phi(v_x, v_y)$ називають *фазовою передавальною функцією*.

Із визначення ОПФ (4.37) можна отримати деякі властивості цієї функції, використовувані на практиці:

1. $G_n(0,0) = 1$.
2. $G_n(-v_x, -v_y) = G_n^*(v_x, v_y)$.
3. $M(v_x, v_y) \leq 1$.

4.4.2. Зв'язок оптичної передавальної функції з фізичними параметрами оптичної системи

Уведення поняття нормованих просторово-частотних спектрів $\tilde{I}_{in}(v_x, v_y)$ та $\tilde{I}_{ign}(v_x, v_y)$ має вичерпне фізичне обґрунтування. За визначенням інтенсивність $I = \langle V \cdot V^* \rangle$ є додатною величиною і завжди містить сталу складову або незмінний фон $\tilde{I}(0,0)$ (розподіл інтенсивності на нульовій просторовій частоті). Якість зображення, що формується некогерентною оптичною системою, визначається змінною інтенсивністю ділянок зображення по відношенню до незмінного фону, тому нормовані спектри інтенсивності визначають контраст об'єкта і його зображення.

Із співвідношення (4.35) маємо, що оптична передавальна функція показує, як оптична система погіршує контраст об'єкта.

Під час аналізу оптичних систем вхідним сигналом служить розподіл яскравості $L(x_o, y_o)$ у площині об'єкта, а вихідним – розподіл освітленості $E(x_i, y_i)$ у площині зображення. Для ідеальної оптичної системи справедливе співвідношення (3.67), яке, з урахуванням параметрів оптичної системи, можна подати у вигляді [7]:

$$E_g(x_{io}, y_{io}) = \pi \tau_o \sin^2 \sigma'_A \frac{1}{\beta^2} L\left(\frac{x_{io}}{\beta}, \frac{y_{io}}{\beta}\right), \quad (4.39)$$

де τ_o – інтегральний коефіцієнт пропускання оптичної системи; $2\sigma'_A$ – задній апертурний кут.

Тоді розподіл освітленості у площині зображення реальної некогерентної оптичної системи на основі інтеграла (4.30) з урахуванням (4.39) запишемо у вигляді

$$E(x_i, y_i) = \pi \tau_o \sin^2 \sigma'_A \frac{1}{\beta^2} \times \iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i - x_{io}, y_i - y_{io})|^2 L(x_{io}/\beta, y_{io}/\beta) dx_{io} dy_{io}. \quad (4.40)$$

Застосувавши теорему згортки [6] до розподілу (4.40), знаходимо, що

$$\tilde{E}(v_x, v_y) = \pi \tau_o \sin^2 \sigma'_A G_n(v_x, v_y) \tilde{L}(\beta v_x, \beta v_y), \quad (4.41)$$

де \tilde{E} і \tilde{L} – просторові спектри розподілу освітленості у площині зображення та яскравості у площині об'єкта відповідно.

На основі отриманих виразів (4.40) і (4.41) некогерентну дифракційно обмежену оптичну систему можна розглядати як фільтр просторових частот з передавальною функцією $G_n(v_x, v_y)$.

Розглянемо розподіл освітленості в зображенні точкового джерела (рис. 4.6), яскравість якого визначається виразом

$$L(x_o, y_o) = L_0 \delta(x_o - x'_o, y_o - y'_o), \quad (4.42)$$

де L_0 – сталий параметр.

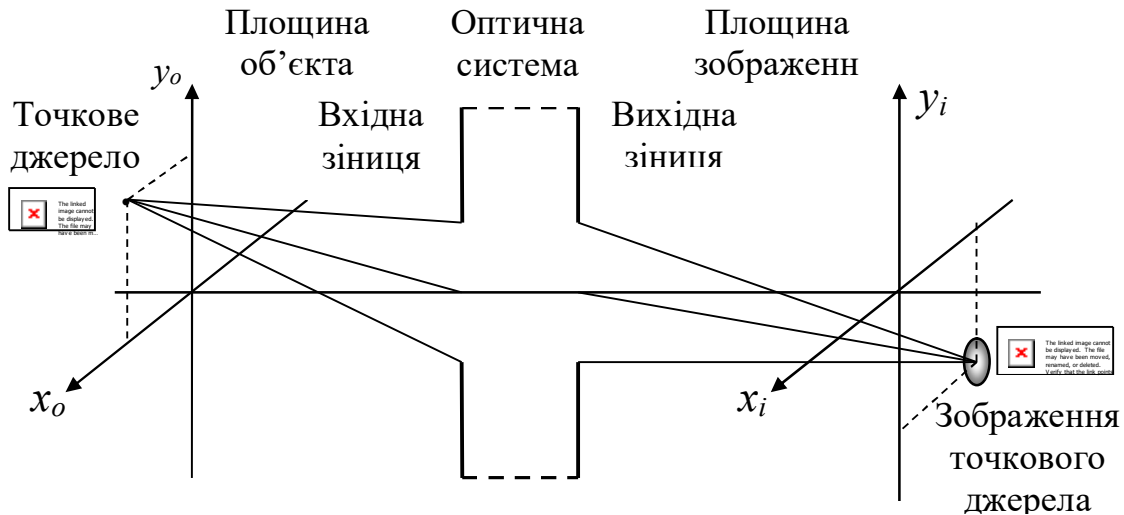


Рис. 4.6. До визначення імпульсного відгуку (функції розсіювання точки) некогерентної оптичної системи

Після підстановки виразу (4.42) у (4.40) знаходимо, що освітленість зображення точкового джерела можна описати функцією

$$E(x_i, y_i) = \pi \tau_o \sin^2 \sigma'_A \frac{1}{\beta^2} L_0 |h_n(x_i - x'_{io}, y_i - y'_{io})|^2. \quad (4.43)$$

Світловий потік, який бере участь у формуванні зображення,

$$\Phi = \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Omega} \tau_o L(x_o, y_o) dx_o dy_o d\Omega = \pi L_0 \tau_o \sin^2 \sigma_A, \quad (4.44)$$

де Ω – тілесний кут, у межах якого випромінювання від точкового джерела надходить до вхідної зіниці оптичної системи і бере участь у формуванні зображення; $2\sigma_A$ – передній апертурний кут оптичної системи.

Із порівняння виразів (4.43) і (4.44) знаходимо

$$|h_n(x_i - x'_{io}, y_i - y'_{io})|^2 = \frac{1}{\Phi} E(x_i, y_i). \quad (4.45)$$

Отже, імпульсний відгук некогерентної оптичної системи (4.45) являє собою нормований розподіл освітленості в зображенні точкового джерела. Іноді $|h_n|^2$ називають *функцією розсіювання точки* (ФРТ – PSF – Point Spread Function) оптичної системи.

Оскільки імпульсний відгук некогерентної оптичної системи дорівнює квадрату імпульсного відгуку когерентної оптичної системи, то має існувати зв'язок між ОПФ і КПФ. Встановимо його. За визначенням виразу (4.37) ОПФ знаходять як

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{F\{|h_n(x_i, y_i)|^2\}}{\iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i}. \quad (4.46)$$

Використовуючи теорему автокореляції для перетворення Фур'є [6], перетворимо чисельник останнього виразу до вигляду

$$F\{|h_n(x_i, y_i)|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} H(v'_x, v'_y) H^*(v'_x - v_x, v'_y - v_y) dv'_x dv'_y. \quad (4.47)$$

Використовуючи теорему Парсеваля для перетворення Фур'є [8], перетворимо знаменник виразу (4.46) до вигляду

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i = \iint_{-\infty}^{\infty} |H(v'_x, v'_y)|^2 dv'_x dv'_y. \quad (4.48)$$

Після підстановки співвідношень (4.47) і (4.48) у вираз (4.46) отримаємо зв'язок між ОПФ і КПФ:

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} H(v'_x, v'_y) H^*(v'_x - v_x, v'_y - v_y) dv'_x dv'_y}{\iint_{-\infty}^{\infty} |H(v'_x, v'_y)|^2 dv'_x dv'_y}. \quad (4.49)$$

Слід зазначити, що вираз (4.49) справедливий як для дифракційно обмежених некогерентних оптичних систем, так і для систем, що мають аберації.

Для дифракційно обмежених когерентних оптичних систем їх КПФ визначають функцією вхідної зіниці (4.23); після підстановки її у вираз (4.49) отримаємо ОПФ таких систем:

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi', \eta') P(\xi' - \lambda a' v_x, \eta' - \lambda a' v_y) d\xi' d\eta'}{\iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi', \eta') d\xi' d\eta'}. \quad (4.50)$$

У знаменнику зроблено заміну $P^2 = P$, оскільки функція $P(\xi', \eta')$ дорівнює або одиниці, або нулю.

Отриманий вираз (4.50) допускає надзвичайно важливу інтерпретацію. Чисельник являє собою площу A_{cr} області перекриття двох зміщених вихідних зіниць, центр однієї з яких міститься у точці $O_1(\xi'_1 = 0, \eta'_1 = 0)$, а центр другої – у точці $O_2(\xi'_1 = \lambda a' v_x, \eta'_1 = \lambda a' v_y)$. Знаменник визначає повну площу A_p вихідної зіниці, тому ОПФ можна розглядати як відносну площу перекриття вихідної зіниці, тобто

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{\text{Площа перекриття}}{\text{Повна площа}} = \frac{A_{cr}}{A_p}. \quad (4.51)$$

Геометричне пояснення ОПФ (рис. 4.7) дає змогу у деяких випадках значно спростити обчислення. Для вихідної зіниці простої форми зазвичай легко знайти загальний вираз для площі перекриття A_{cr} . Крім того, з виразу (4.51) видно, що ОПФ дифракційно обмежених систем є дійсними і додатними функціями, тобто

$$G_n(v_x, v_y) = M(v_x, v_y).$$

Розглянемо два приклади визначення ОПФ дифракційно обмежених систем з прямокутною і круглою вихідними зіницями. Функції зіниці таких систем визначаються співвідношеннями (4.25) і (4.26).

Область перекриття прямокутної вихідної зіниці зображено на рис. 4.8, а, площа її

$$A_{cr} = \begin{cases} (a - \lambda a' |v_x|)(b - \lambda a' |v_y|), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.52)$$

Після нормування на повну площу $A_p = ab$ маємо

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{A_{cr}}{A_p} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x|\right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{b} |v_y|\right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.53)$$

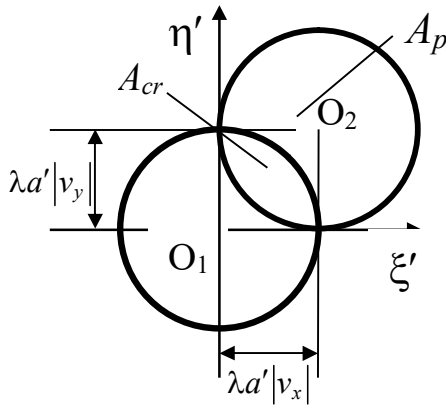


Рис. 4.7. Геометричне пояснення ОПФ дифракційно обмеженої оптичної системи

Графіки функції (4.53) показано на рис. 4.8, б. Граничну просторову частоту, яку пропускає така система, можна визначити як

$$|v_{x,max}| = \frac{a}{\lambda a'}, |v_{y,max}| = \frac{b}{\lambda a'}. \quad (4.54)$$

Оптичну передавальну функцію для круглої вихідної зіниці розрахувати складніше. Оскільки ОПФ такої системи буде вісесиметричною, то достатньо обчислити значення G_n уздовж додатної осі

$v_x = v_r$ (рис. 4.9, а). Геометричний розрахунок дає такий результат (див. приклад 4.2):

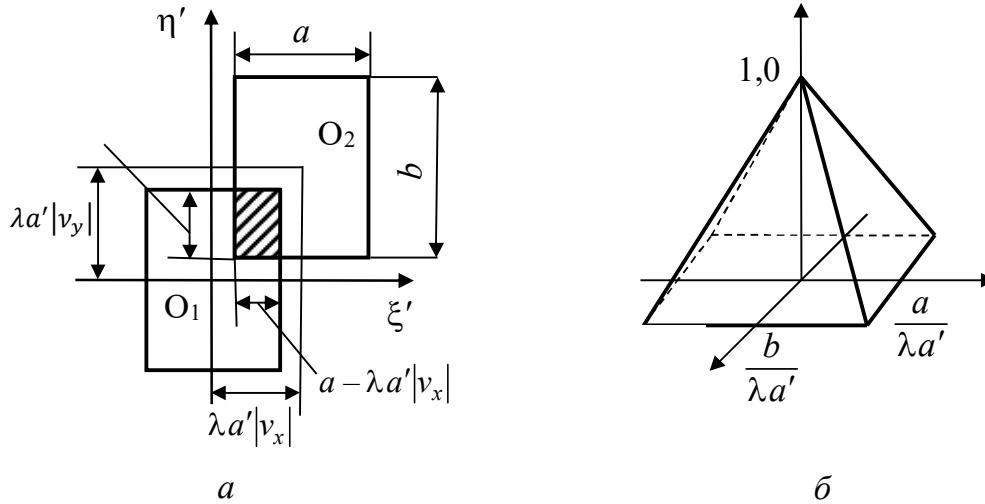


Рис. 4.8. Оптична передавальна функція системи з прямокутною вихідною зіницею:

а – до розрахунку області перекриття; б – вигляд функції

$$G_n(v_r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_p} \right) - \frac{\lambda a' v_r}{2R_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_p} \right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq v_r \leq \frac{2R_p}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.55)$$

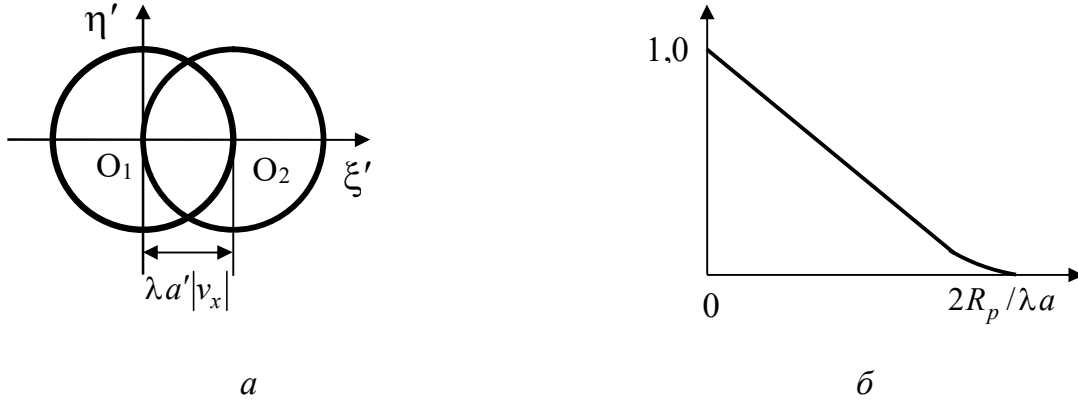


Рис. 4.9. Оптична передавальна функція системи з круглою вихідною зіницею:
а – до визначення області перекриття; б – вигляд одновимірної функції

Область перекриття круглої вихідної зіниці та ОПФ (4.55) зображено на рис. 4.9. Граничну просторову частоту такої системи визначають як

$$v_{r,max} = \frac{2R_p}{\lambda a'}. \quad (4.56)$$

Слід також зазначити, що гранична просторова частота дифракційно обмежених некогерентних оптичних систем (4.54) або (4.56) у два рази перевищує граничну просторову частоту когерентної системи (4.29).

4.5. Приклади розрахунку передавальних функцій оптичних систем

Приклад 4.1. Доведіть, що якщо ФРТ об'єктива апроксимується функцією

$$|h_o(x_i, y_i)|^2 = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) \cos\left(\frac{\pi y_i}{2y_o}\right), & \text{коли } |x_i| \leq x_o, |y_i| \leq y_o; \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

то його ОПФ має вигляд

$$G_o(v_x, v_y) = \frac{\cos(2\pi x_o v_x)}{1-16x_o^2 v_x^2} \frac{\cos(2\pi y_o v_y)}{1-16y_o^2 v_y^2}.$$

Розв'язання. Для визначення ОПФ об'єктива скористаємося формулою (4.34). Підставимо у вираз (4.37) ФРТ об'єктива $|h_o(x_i, y_i)|^2$:

$$G_o(v_x, v_y) = \frac{\int_{-x_o}^{x_o} \int_{-y_o}^{y_o} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) \cos\left(\frac{\pi y_i}{2y_o}\right) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i}{\int_{-x_o}^{x_o} \int_{-y_o}^{y_o} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) \cos\left(\frac{\pi y_i}{2y_o}\right) dx_i dy_i} = \frac{I_1}{I_2}. \quad (4.57)$$

Оскільки під інтегралами у виразі (4.57) містяться функції зі змінними, що розділяються, то перейдемо у цьому виразі від двократних інтегралів до однократних:

$$I_1 = \int_{-x_o}^{x_o} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2 x_o}\right) \exp(-j2\pi v_x x_i) dx_i \int_{-y_o}^{y_o} \cos\left(\frac{\pi y_i}{2 y_o}\right) \exp(-j2\pi v_y y_i) dy_i = I_{1x} I_{1y};$$

$$I_2 = \int_{-x_o}^{x_o} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2 x_o}\right) dx_i \int_{-y_o}^{y_o} \cos\left(\frac{\pi y_i}{2 y_o}\right) dy_i = I_{2x} I_{2y}.$$

Для розрахунку цих інтегралів скористаємося табличним інтегралом 1.5.50.11 із довідника [3]:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx). \quad (4.58)$$

Для інтеграла I_{1x} замінімо змінні: $x = x_i$; $a = -j2\pi v_x$; $b = \frac{\pi}{2 x_o}$,

тоді

$$I_{1x} = \frac{\exp(-2\pi v_x x_o)}{\frac{\pi^2}{4x_o^2} - 4\pi^2 v_x^2} \left[(-j2\pi v_x) \cos\left(\frac{\pi x_i}{2 x_o}\right) + \frac{\pi}{2 x_o} \sin\left(\frac{\pi x_i}{2 x_o}\right) \right] \Bigg|_{-x_o}^{x_o} =$$

$$= 4x_o^2 \frac{\exp(-j2\pi v_x x_o)}{\pi^2 - 16\pi^2 x_o^2 v_x^2} \left[\frac{\pi}{2 x_o} \right] - 4x_o^2 \frac{\exp(j2\pi v_x x_o)}{\pi^2 - 16\pi^2 x_o^2 v_x^2} \left[-\frac{\pi}{2 x_o} \right] = 4\pi x_o \frac{\cos(2\pi v_x x_o)}{\pi^2 - 16\pi^2 x_o^2 v_x^2}.$$

Аналогічно для інтеграла I_{1y} маємо:

$$I_{1y} = 4\pi y_o \frac{\cos(2\pi v_y y_o)}{\pi^2 - 16\pi^2 y_o^2 v_y^2}.$$

Для інтеграла I_{2x} в (4.58) $a = 0$. Тоді $I_{2x} = \frac{4x_o}{\pi}$. Аналогічно $I_{2y} = \frac{4y_o}{\pi}$.

Після підстановки отриманих інтегралів у вираз (4.57) маємо:

$$G_o(v_x, v_y) = \frac{\cos(2\pi v_x x_o)}{1 - 16x_o^2 v_x^2} \frac{\cos(2\pi v_y y_o)}{1 - 16y_o^2 v_y^2}.$$

Приклад 4.2. Знайдіть ОПФ дифракційно обмеженої оптичної системи з круглою вихідною зіницею діаметром D_p .

Розв'язання. Для визначення ОПФ дифракційно обмеженої оптичної системи використаємо формулу (4.51), де $A_p = \pi D_p^2/4$ – площа вихідної зіниці.

Для круглої вихідної зіниці ОПФ системи матиме вісесиметричний вигляд. Тому будемо розглядати площу перекриття A_{cr} за умови зміщення

двох зіниць уздовж осі ξ' на величину $\lambda a' v_r$ (рис. 4.10). Із рис. 4.10 маємо, що площа перекриття складається із двох однакових сегментів A_{AMB} та A_{ANB} .

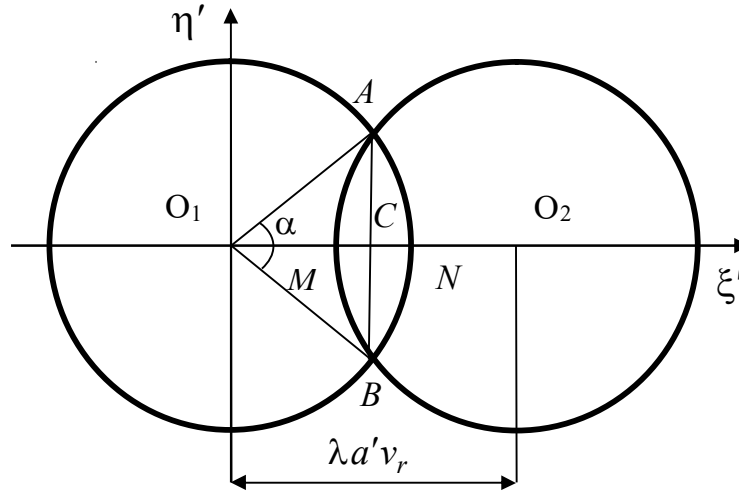


Рис. 4.10. До прикладу 4.2

Площу кожного сегмента знаходять за формулою

$$A_{AMB} = A_{ANB} = \frac{D_p^2}{8} (\alpha - \sin \alpha), \quad (4.59)$$

де кут $\alpha = \angle AO_1B = \angle AO_2B$ виражається в радіанах.

Із рис. 4.10 знаходимо, що $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{O_1C}{O_1A} = \frac{\lambda a' v_r}{D_p}$,

звідки $\alpha = 2 \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right)$.

Тоді формулу (4.59) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} A_{AMB} &= \frac{D_p^2}{8} \left[2 \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) - \sin 2 \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) \right] = \\ &= \frac{D_p^2}{8} \left[2 \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) - 2 \cos \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) \sin \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) \right] = \\ &= \frac{D_p^2}{4} \left[\arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

У формулі (4.60) величина $\lambda a' v_r$ має обмеження $\lambda a' v_r \leq D_p$. Якщо $\lambda a' v_r \geq D_p$, то $A_{cr} = 0$.

Після підстановки формули (4.60) у вираз (4.51) отримаємо ОПФ розглядуваної системи:

$$G_n(v_x, v_y) = G_n(v_r) = \frac{A_{cr}}{A_p} = \frac{2A_{AMB}}{A_p} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq v_r \leq \frac{D_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.61)$$

Приклад 4.3. Некогерентна оптична система має вихідну зіницю у вигляді двох симетрично розміщених квадратів (рис. 4.11). Розрахуйте ОПФ такої системи.

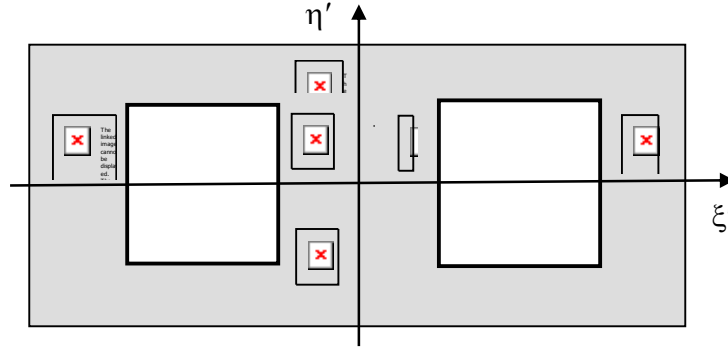


Рис. 4.11. До прикладу 4.3

Розв'язання. Для визначення ОПФ дифракційно обмеженої оптичної системи використаємо формулу (4.51), де $A_p = 2a^2$ – площа вихідної зіниці. Щоб знайти площу перекриття A_{cr} розглянемо три випадки, коли зміщення вхідної зіниці становить:

- 1) $0 \leq \lambda a' |v_x| \leq a; 0 \leq \lambda a' |v_y| \leq a;$
- 2) $a \leq \lambda a' |v_x| \leq 2a; 0 \leq \lambda a' |v_y| \leq a;$
- 3) $2a \leq \lambda a' |v_x| \leq 3a; 0 \leq \lambda a' |v_y| \leq a.$

1. Аналогічно п. 4.4.2 згідно з формулою (4.53) маємо

$$G_{n1}(v_x, v_y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x|\right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y|\right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.62)$$

2. Розглянемо рис. 4.12. У цьому випадку утворюється тільки одна площа перекриття, яка, згідно з формулою (4.52),

$$A_{cr} = \begin{cases} (\lambda a' |v_x| - a)(a - \lambda a' |v_y|), & \text{коли } \frac{a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{2a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.63)$$

Функція (4.63) досягає свого максимального значення a^2 , коли $\lambda a' |v_x| = 2a$, $\lambda a' |v_y| = 0$. Тоді ОПФ системи згідно з виразом (4.51)

$$G_{n2}(v_x, v_y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda a'}{a} |v_x| - 1 \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{2a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.64)$$

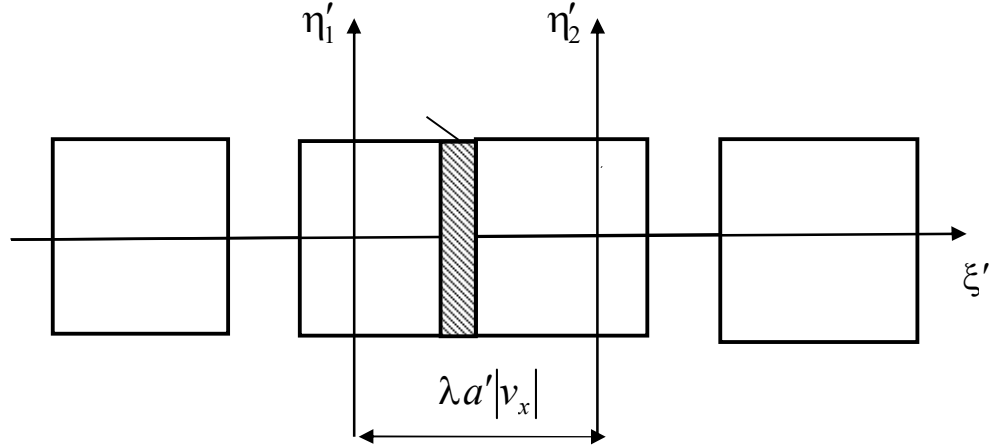


Рис. 4.12. До прикладу 4.3: визначення площі перекриття A_{cr} , коли зміщення вхідної зіниці становить $a \leq \lambda a' |v_x| \leq 2a$; $\lambda a' |v_y| = 0$

3. Розглянемо рис. 4.13. У цьому випадку також утворюється тільки одна площа перекриття, яка, згідно з формулою (4.52),

$$A_{cr} = \begin{cases} (3a - \lambda a' |v_x|)(a - \lambda a' |v_y|), & \text{коли } \frac{2a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.65)$$

Функція (4.65) досягає свого максимального значення a^2 , коли $\lambda a' |v_x| = 2a$, $\lambda a' |v_y| = 0$, і дорівнює нулю, коли $\lambda a' |v_x| = 3a$. Тоді ОПФ системи згідно з виразом (4.51)

$$G_{n3}(v_x, v_y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{2a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.66)$$

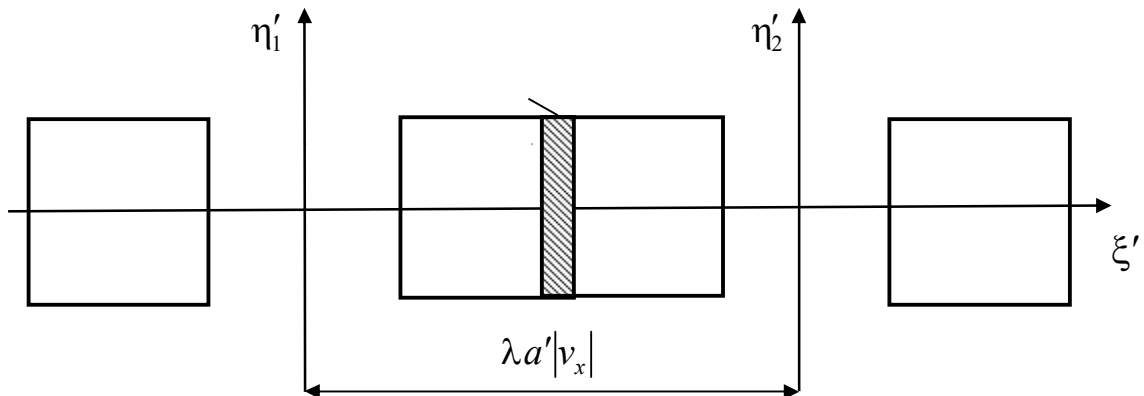


Рис. 4.13. До прикладу 4.3: визначення площі перекриття A_{cr} , коли зміщення вхідної зіниці становить $2a \leq \lambda a' |v_x| \leq 3a, \lambda a' |v_y| = 0$

Отже, загальна ОПФ системи з урахування виразів (4.62), (4.64) та (4.66) описується функцією

$$G_n(v_x, v_y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x|\right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y|\right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda a'}{a} |v_x| - 1\right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y|\right), & \text{коли } \frac{a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{2a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x|\right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y|\right), & \text{коли } \frac{2a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Приклад 4.4. Знайдіть роздільну здатність дифракційно обмеженого інфрачервоного об'єктива, який має відносний отвір 1:1, коли контраст зображення зменшується у двічі для довжини хвилі 10 мкм.

Розв'язання. 1. Просторову роздільну здатність об'єктива будемо знаходити із рівняння $M_o(v_{res}) = 0,5$, де M_o – МПФ дифракційно обмеженого об'єктива, яка визначається функцією (4.61). Для об'єкта спостереження, який знаходиться на значній відстані, ця функція має вигляд

$$M_o(v_r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda f' v_r}{D_p}\right) - \frac{\lambda f' v_r}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda f' v_r}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq v_r \leq \frac{D_p}{\lambda f'}; \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де f' – фокусна відстань об'єктива.

2. Із умови задачі маємо

$$M_o(v_{res}) = \frac{2}{\pi} \left[\arccos(0,01 v_{res}) - 0,01 v_{res} \sqrt{1 - (0,01 v_{res})^2} \right] = 0,5.$$

Розв'язком цього трансцендентного рівняння є роздільна здатність об'єктива $v_{res} = 41 \text{ мм}^{-1}$.

4.6. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1. Некогерентна дифракційно обмежена оптична система має вихідну зіницю у вигляді квадрата зі стороною l . Квадратний екран зі

стороною $l/2$ встановлений у центрі зіниці (рис. 4.14). Побудуйте графік одновимірної ОПФ для випадків, коли екран є і його немає, якщо $l = 50$ мм, $a' = 100$ мм, $\lambda = 0,5$ мкм.

Відповідь:

$$G_{n1}(v_x, 0) = \begin{cases} 1 - 2 \frac{\lambda a'}{l} |v_x|, & \text{коли } 0 \leq |v_x| \leq \frac{l}{4\lambda a'}; \\ \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\lambda a'}{l} |v_x| \right), & \text{коли } \frac{l}{4\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{l}{2\lambda a'}; \\ \frac{1}{3}, & \text{коли } \frac{l}{2\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3l}{4\lambda a'}; \\ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\lambda a'}{l} |v_x| \right), & \text{коли } \frac{3l}{4\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{l}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$G_{n2}(v_x, v_y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda a'}{l} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{l} |v_y| \right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{l}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{l}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Задача 4.2. Некогерентна оптична система має вихідну зіницю у вигляді двох симетрично розміщених прямокутників (рис. 4.15). Розрахуйте ОПФ такої системи і побудуйте її графік.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 4.3.

Відповідь:

$$G_n(v_x, v_y) = \begin{cases} 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda a'}{b} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{b} |v_y| \right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{b}{2\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{коли } \frac{b}{2\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{b}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda a'}{b} |v_x| - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{b} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{b}{2\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3b}{2\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ \left(2 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{3b}{2\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{2b}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

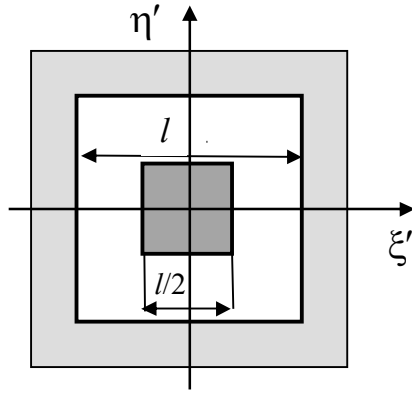


Рис. 4.14. До задачі 4.1

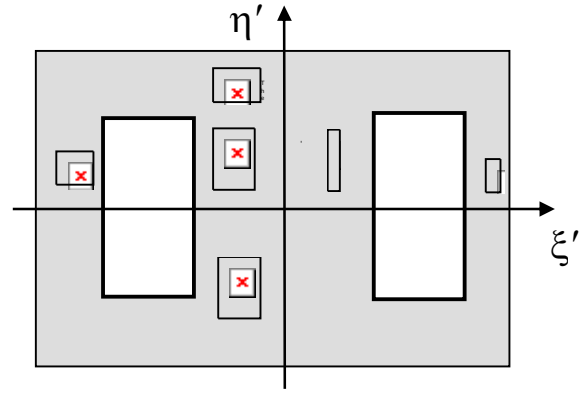


Рис. 4.15. До задачі 4.2

Задача 4.3. Некогерентна оптична система має вихідну круглу зіницю діаметром D_p . Діафрагма у вигляді півплощини розміщена у вихідній зіниці (рис. 4.16). Знайдіть вираз для ОПФ уздовж осей v_x та v_y , коли є екран і коли його немає. Побудуйте графіки цих функцій, якщо $D_p = 10$ мм, $a' = 50$ мм, $\lambda = 0,5$ мкм.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 4.2.

Відповідь:

$$G_1(v_x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_x}{D_p}\right) - \frac{\lambda a' v_x}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_x}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } |v_x| \leq \frac{D_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$G_1(0, v_y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{2\lambda a' v_y}{D_p}\right) - \frac{2\lambda a' v_y}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{2\lambda a' v_y}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq |v_y| \leq \frac{D_p}{2\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$G_2(v_x) = G_2(v_y) = G_2(v_r) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } v_r \leq \frac{D_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Задача 4.4. Вихідна зіниця некогерентної оптичної системи має форму кільця з радіусами R_{p1} і R_{p2} . Визначте ОПФ такої системи і побудуйте її графік.

$$\text{Відповідь: } G(v_r) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}}\right)^2} \right] - \right. \\ \left. - \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p2}}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{2R_{p2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p2}}\right)^2} \right] \right\}, \text{ коли } 0 \leq v_r \leq \frac{2R_{p1}}{\lambda a'}.$$

Задача 4.4. Вихідна зіниця некогерентної оптичної системи має форму кільця з радіусами R_{p1} і R_{p2} . Визначте ОПФ такої системи і побудуйте її графік.

$$\text{Відповідь: } G(v_r) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}}\right)^2} \right] - \right. \\ \left. - \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p2}}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{2R_{p2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p2}}\right)^2} \right] \right\}, \text{ коли } 0 \leq v_r \leq \frac{2R_{p1}}{\lambda a'}.$$

Задача 4.5. Зображення предмета з амплітудним коефіцієнтом пропускання у вигляді прямокутної ґратки (рис. 4.17) формується лінзою з круглою вихідною зіницею. Фокусна відстань лінзи $f = 10$ см, частота першої гармоніки прямокутної ґратки $v_{x1} = 1000 \text{ см}^{-1}$, відстань до предмета $a = -20$ см, довжина хвилі $\lambda = 0,5$ мкм. Знайдіть мінімальний діаметр лінзи, за якого буде ще помітно деяке зменшення інтенсивності у площині зображення для випадків когерентного і некогерентного освітлення предмета.

$$\text{Відповідь: } D_{p,min1} = 2\lambda a' v_{x1} = 20 \text{ мм}, D_{p,min2} = \lambda a' v_{x1} = 10 \text{ мм}.$$

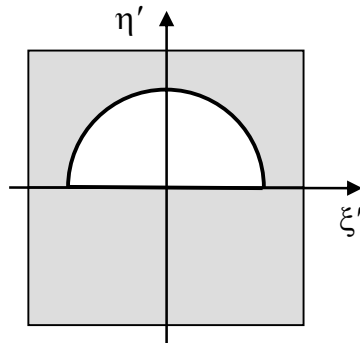


Рис. 4.16. До задачі 4.3

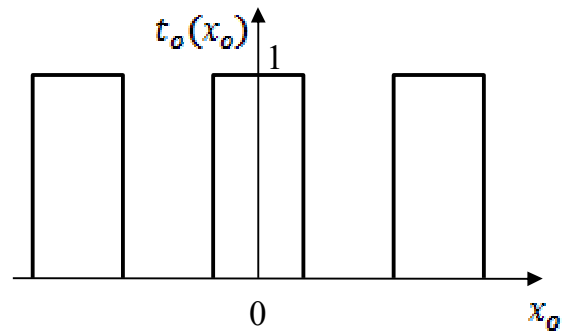


Рис. 4.17. До задачі 4.5

Задача 4.6. Вихідна зіниця оптичної некогерентної системи має форму, зображену на рис. 4.18. Знайдіть переріз ОПФ площинами $v_x = 0$ та $v_y = 0$ і визначте значення граничних просторових частот.

Відповідь:

$$G(v_x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_x}{2R_p}\right) - \frac{\lambda a' v_x}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_x}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } |v_x| \leq \frac{2R_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$G(0, v_y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_y}{2R_p}\right) - \frac{\lambda a' v_y}{2R_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_y}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq |v_y| \leq \frac{2R_p}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{4R_p - \lambda a' v_y}{2R_p}\right) - \frac{4R_p - \lambda a' v_y}{2R_p} \sqrt{1 - \left(\frac{4R_p - \lambda a' v_y}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } \frac{2R_p}{\lambda a'} \leq |v_y| \leq \frac{4R_p}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_y - 4R_p}{2R_p}\right) - \frac{\lambda a' v_y - 4R_p}{2R_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_y - 4R_p}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } \frac{4R_p}{\lambda a'} \leq |v_y| \leq \frac{6R_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$v_{x,max} = \frac{2R_p}{\lambda a'}, \quad v_{y,max} = \frac{6R_p}{\lambda a'}.$$

Задача 4.7. Величину аберацій некогерентної системи зручно характеризувати фактором (числом) Штреля D_{Sh} , який визначається як відношення інтенсивності світла в максимумі зображення точкового джерела (імпульсного відгуку) до максимуму інтенсивності в зображення точкового джерела тієї ж системи, коли немає аберацій.

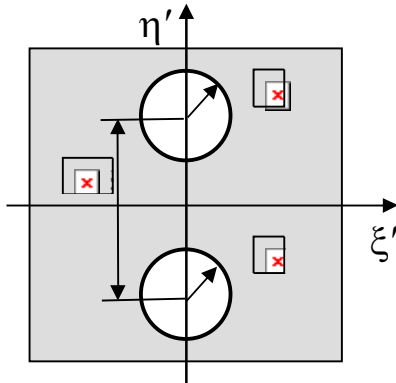


Рис. 4.18. До задачі 4.6

Доведіть, що число Штреля дорівнює нормованій площі під ОПФ системи з абераціями $G_{n,ab}(v_x, v_y)$:

$$D_{Sh} = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} G_{n,ab}(v_x, v_y) dv_x dv_y}{\iint_{-\infty}^{\infty} G_{n,d-l}(v_x, v_y) dv_x dv_y},$$

де $G_{n,d-l}(v_x, v_y)$ – ОПФ дифракційно обмеженої системи.

Задача 4.8. Функція розсіювання

некогерентної системи являє собою кружок радіусом r_o з рівномірним розподілом освітленості. Визначте ОПФ такої системи.

$$\text{Відповідь: } G_o(v_r) = \frac{2J_1(2\pi r_o v_r)}{2\pi r_o v_r}.$$

Задача 4.9. Знайдіть ОПФ і побудуйте її графік для об'єктива з косинус-квадратичною апроксимацією ФРТ, яка має вигляд

$$|h_o(x_i, y_i)|^2 = \begin{cases} h_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi x_i}{2 r_o}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y_i}{2 r_o}\right), & \text{коли } |x_i| \leq r_o, |y_i| \leq r_o; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Вказівка: Скористайтесь табличним інтегралом

$$\int e^{ax} \cos^2 bx dx = \frac{e^{ax}}{2a} + \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2} \left(\frac{a}{2} \cos 2bx + b \sin 2bx \right).$$

$$\text{Відповідь: } G_o(v_x, v_y) = \frac{\text{sinc}(2r_o v_x) \text{sinc}(2r_o v_y)}{1 - 4r_o^2 v_x^2} \frac{\text{sinc}(2r_o v_y)}{1 - 4r_o^2 v_y^2}.$$

Задача 4.10. Знайдіть ОПФ і побудуйте її графік для об'єктива, ФРТ якого має вигляд

$$|h_o(x_i, y_i)|^2 = \frac{1}{\pi r_o^2} \exp\left(-\frac{x_i^2 + y_i^2}{2r_o^2}\right).$$

$$\text{Відповідь: } G_o(v_r) = \exp[-2\pi^2 r_o^2 (v_x^2 + v_y^2)].$$

Задача 4.11.* Функція розсіювання об'єктива з виправленими абераціями визначається дифракційним розсіюванням:

$$|h_o(r_i)|^2 = \left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi D_p r_i}{\lambda f}\right)}{\frac{\pi D_p r_i}{\lambda f}} \right]^2,$$

де J_1 – функція Бесселя першого роду першого порядку; D_p – діаметр вихідної зіниці; f – задня фокусна відстань; λ – довжина хвилі.

Доведіть, що ОПФ такого об'єктива визначається функцією

$$G_o(v_r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq v_r \leq \frac{D_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Задача 4.12. Знайдіть значення МПФ дифракційно обмеженого з фокусною відстанню $f_o' = 100$ мм і діаметром вхідної зіниці $D_p = 50$ мм на

просторовій частоті $\nu_r = 50 \text{ мм}^{-1}$ для монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 10 \text{ мкм}$.

Відповідь: $G_n(\nu_r = 50 \text{ мм}^{-1}) = 0,39$.

Задача 4.13. Знайдіть роздільну здатність дифракційно обмеженого об'єктива, який має відносний отвір 1:2, коли контраст зображення зменшується у двічі для довжини хвилі $0,5 \text{ мкм}$.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 4.4.

Відповідь: $\nu_{res} = 403 \text{ мм}^{-1}$.

Розділ 5. ДИФРАКЦІЙНІ ОПТИЧНІ ЕЛЕМЕНТИ

В останні 25 років, з того часу як мікролітографію почали використовувати у виробництві оптичних елементів, дифракційна оптика зазнала значного розвитку. В наш час виробництво дифракційних оптичних елементів (diffractive optical element – DOE) набуло досконалості, дифракційні елементи широко застосовують, з'являються нові сфери застосування та нові інтегровані оптичні системи [9,10].

Дифракційними оптичними елементами називають оптичні елементи, які здійснюють перетворення фронту падаючої хвилі в результаті дифракції світла на мікроструктурі елемента, що створена на поверхні заданої форми.

5.1. Фізичні основи дифракційної оптики

Дифракційна оптика є частиною фізичної оптики, яка розглядає усі форми поширення електромагнітних хвиль.

5.1.1. Принцип роботи і класифікація DOE

Дифракційні оптичні елементи класифікують за типом дифракційної структури, за формою робочої поверхні, на якій створено структуру, за видом перетворення хвильового фронту [11]. Дифракційна структура може працювати на пропускання або на відбиття, здійснюючи амплітудну або фазову модуляцію падаючої хвилі. При цьому промені, утворені за рахунок дифракції світла, розміщуються з двох боків відносно променів, що не беруть участі в дифракції (промені нульового порядку). Порядок дифракції відраховується від нульового – найчастіше додатний справа, а від'ємний зліва.

Історично першими DOE були плоскі дифракційні ґратки із структурою у вигляді прямолінійних періодичних структур (див. задачу 3.14 і кільцеві зонні пластинки Френеля (п. 2.3)). Дифракційні оптичні елементи із структурою, подібною до структури зонної пластинки Френеля, називають *дифракційними лінзами*. Амплітудна зонна пластинка була запропонована О. Френелем на початку XIX ст., її структура являє собою послідовно розміщені прозорі та

непрозорі концентричні кільцеві зони, радіуси яких пропорційні кореню квадратному із цілих чисел (рис. 5.1). Така пластинка за дією еквівалентна декільком додатним і від'ємним лінзам, розміщеним в одній апертурі (рис. 5.2, див. задачу 2.4) [12]. У 1898 р. Р. Вуд вперше виготовив фазоінверсну пластинку. Зонну пластинку з фазовим профілем зон називають *кіноформом*.

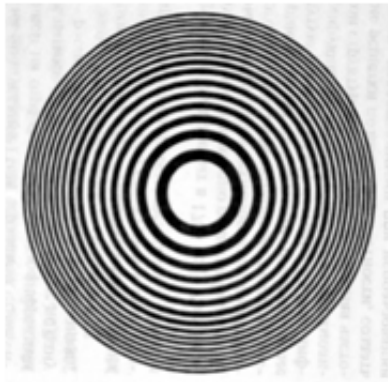


Рис. 5.1. Зонна пластинка Френеля

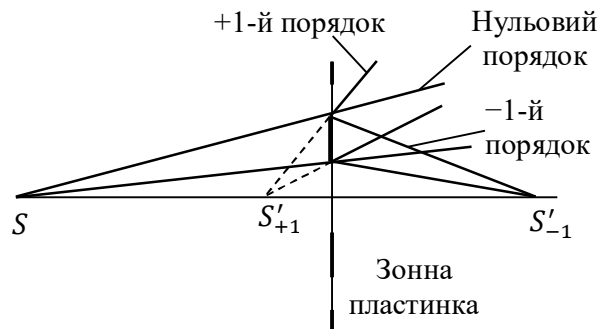


Рис. 5.2. Властивості фокусування зонної пластинки

Як було зазначено в п. 2.3, зонна пластинка виконує функцію фокусування світла і діє подібно до лінзи, яка має велику кількість фокусів, що відповідають різним порядкам дифракції й розміщені на осі поширення світла. Фокусні відстані зонної пластинки визначають за формулою

$$f_m = \frac{f_1}{2m+1}. \quad (5.1)$$

Інтенсивність світла на фокусній відстані (5.1) від зонної пластинки зменшується із збільшенням порядку дифракції m за законом [13]

$$I_{2m+1} = \frac{4}{\pi^2} \frac{I_0}{(2m+1)^2}, \quad (5.2)$$

де I_0 – інтенсивність падаючого світла.

У 1967 р. А. В. Ломан і Д. П. Паріс запропонували двовимірні (2D) дифракційні ґратки із змінними зонами Френеля, які можна отримати на основі муарових ефектів у результаті суперпозиції двох синтезованих масок. Наприклад, якщо записати на одній пластинці дві схрещені циліндричні лінзи

з різними фокусними відстанями, то такий ДОЕ дозволяє отримати зображення відрізка, що лежить у площині, перпендикулярній до осі поширення паралельного пучка світла.

Дифракційна оптика розглядає такі елементи [14]:

- *Дифракційний оптичний елемент* – це компонент, який змінює хвильовий фронт шляхом сегментації та зміни напрямку поширення сегментів завдяки інтерференції та контролю фази.

- *Кіноформ* (Kinoform) – це ДОЕ, в якого контрольована фазова поверхня плавно змінюється.

- *Бінарна оптика* (Binary Optic) – це ДОЕ з дискретним числом контрольованих фазових поверхонь. Найбільш простий елемент, що виготовляється за допомогою однієї літографічної маски, має тільки дві поверхні, які вносять нульову або π різницю фаз до фронту падаючої хвилі. Використовуючи N масок можна створити багаторівневу бінарну оптику, яка має 2^N рівнів фази.

- *Комп'ютерна голограма* (Computer – Generated Hologram) – це ДОЕ, створений у результаті розрахунків інтерференційної картини з певним набором фазових хвиль або розрахунку амплітудно-фазової маски.

- *Голографічний оптичний елемент* (Holographic Optical Element) – це ДОЕ, створений у результаті інтерференції двох хвильових фронтів із оптичних компонентів, які будуть використовуватися як оптичні компоненти.

Під час проектування ДОЕ можна використовувати проходження світла у вигляді променів, однак щоб краще зрозуміти принцип роботи ДОЕ бажано використовувати поняття хвильової поверхні (фронту), яка перпендикулярна до світлових променів. Під *хвильовою поверхнею* розуміють безперервну поверхню, на якій електричне поле має однакову фазу і зазвичай однакову амплітуду.

Загальні методи проектування мікроструктури ДОЕ, які мають задані функціональні властивості, вимагають розв'язання оберненої задачі теорії дифракції відносно фазової функції ДОЕ, яка здійснює необхідне

перетворення світлової хвилі. Ця фазова функція має вигляд структури з фазовим мікрорельєфом.

Під *фазовою функцією* $\varphi(x, y)$ оптичного елемента будемо розуміти функцію, яка описує залежність фазової затримки (зсуву), що створює оптичний елемент, від просторових координат x, y площини, де розміщений ДОЕ.

Звичайна (традиційна) лінза характеризується гладкою (неперервною) фазовою функцією $\varphi(x, y)$, яка може досягати десятків тисяч 2π . Водночас зміна фази у фазоінверсній пластині Вуда становить π . Якщо на лінзу падає хвиля з комплексною амплітудою $V(x, y)$, то безпосередньо за лінзою амплітуда поля

$$V'(x, y) = V(x, y)t_l(x, y) = V(x, y)\exp[j\varphi_l(x, y)], \quad (5.3)$$

де $t_l(x, y)$ – фазовий коефіцієнт пропускання лінзи.

З урахуванням того, що комплексна експонента у виразі (5.3) є періодичною функцією з періодом 2π , фазу можна звести до інтервалу $[0, 2\pi)$. Таку операцію подають у вигляді [13]

$$\Phi = \text{mod}_{2\pi}\varphi, \quad (5.4)$$

де $\text{mod}_{2\pi}\varphi = \varphi - 2\pi m$ за $2\pi m \leq \varphi \leq 2\pi(m + 1)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

У багатьох практичних випадках фазу у виразі (5.4) зводять до інтервалу $[0, 2\pi m)$ за формулою

$$\Phi = \text{mod}_{2\pi m}\varphi. \quad (5.5)$$

За умов (5.4) або (5.5) справедливе співвідношення

$$t(x, y) = \exp(j\Phi) = \exp(j\varphi). \quad (5.6)$$

Рівняння для фазової функції тонкої додатної сферичної лінзи було отримано в розділі 3, яке в параксіальній області має вигляд

$$\varphi_l(x, y) = \varphi_l(r) = \begin{cases} -\frac{\pi r^2}{\lambda f}, & \text{коли } r \leq \frac{D_p}{2}; \\ 0, & \text{коли } r > \frac{D_p}{2}, \end{cases} \quad (5.7)$$

де f і D_p – фокусна відстань і діаметр вхідної зіниці лінзи відповідно.

Зведення фазової функції сферичної лінзи (5.7) відповідно до

співвідношення (5.6) до інтервалу $[0, 2\pi)$ показано на рис. 5.3.

Для фазової зонної пластинки Френеля, що виготовлена із матеріалу з показником заломлення n , максимальна висота мікрорельєфу становить

$$h_{\max} = \frac{\lambda}{n-1}. \quad (5.8)$$

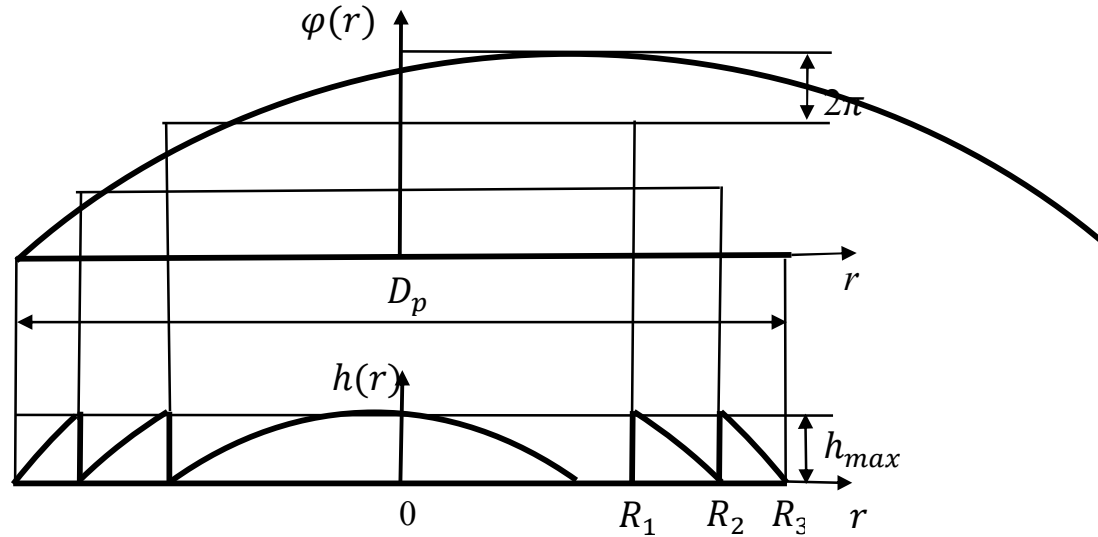


Рис. 5.3. Зведення фазової функції лінзи до інтервалу $[0, 2\pi)$

Функціональну залежність висоти мікрорельєфу знаходять за формулою

$$h(r) = \frac{\lambda}{n-1} \frac{1}{2\pi} \text{mod}_{2\pi} \varphi(r). \quad (5.9)$$

За цих умов радіуси зон Френеля R_q можна знайти із співвідношення

$$\varphi(R_q) = -2\pi q. \quad (5.10)$$

Із формул (5.7) і (5.10) маємо:

$$R_q = \sqrt{2\lambda f q}. \quad (5.11)$$

Ширину зон Френеля для плоскої сферичної лінзи визначають із формули (5.11) як

$$\Delta R_q = R_{q+1} - R_q = \frac{\lambda f}{\sqrt{2\lambda f q}} = \sqrt{\frac{\lambda f}{2q}}. \quad (5.12)$$

Із співвідношення (5.12) видно, що ширина зон є змінною величиною, яка зменшується до краю лінзи. Характерним параметром є ширина ΔR_q найбільш вузької (останньої) зони, яка визначається вимогами технології виготовлення лінзи.

Порівнюючи між собою формули для радіусів зон пластинки Френеля (2.25) і плоскої сферичної лінзи (5.11), знаходимо, що радіуси зон лінзи у $\sqrt{2}$ рази більші за радіуси кілець зонної пластинки. Це означає, що кожному кільцю сферичної плоскої лінзи відповідають два кільця пластинки: прозоре і непрозоре. Плоска лінза має неперервний (у межах зони) фазовий рельєф, а фазова зонна пластинка має бінарний фазовий рельєф (рис. 5.4).

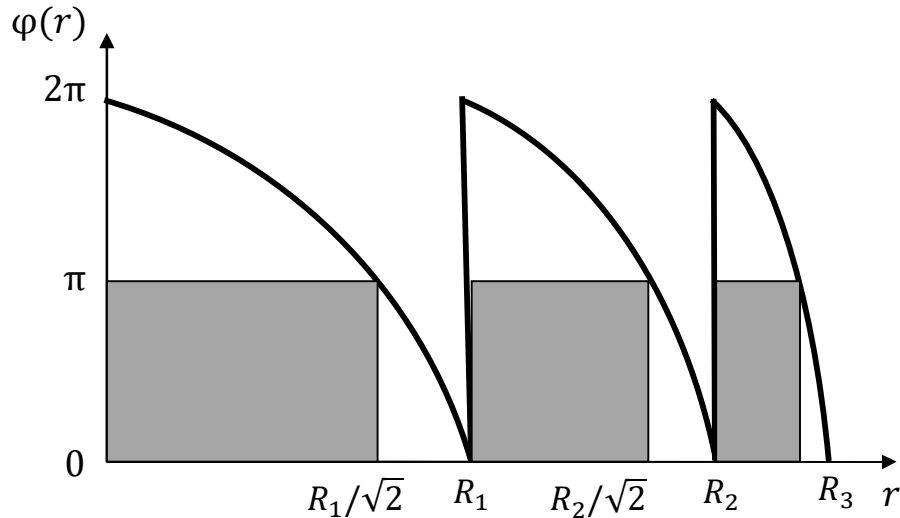


Рис. 5.4. Фазові функції сферичної плоскої лінзи і зонної пластинки Френеля (темні прямокутники)

У деяких практичних випадках неперервну фазову функцію плоскої лінзи можна апроксимувати ступінчатою дискретною функцією у межах зони Френеля. Приклад рівномірного квантування фази сферичної лінзи Френеля на чотири рівні подано на рис. 5.5. Використовуючи цей рисунок можна розрахувати радіуси кілець ступінчатої функції у межах певної зони Френеля.

Плоска циліндрична лінза має фазову функцію

$$\varphi(x, y) = -\frac{\pi x^2}{\lambda f}. \quad (5.13)$$

Межі зон Френеля для такої лінзи – прямі лінії, а відстань між ними Δx_q визначається аналогічно виразу (5.12).

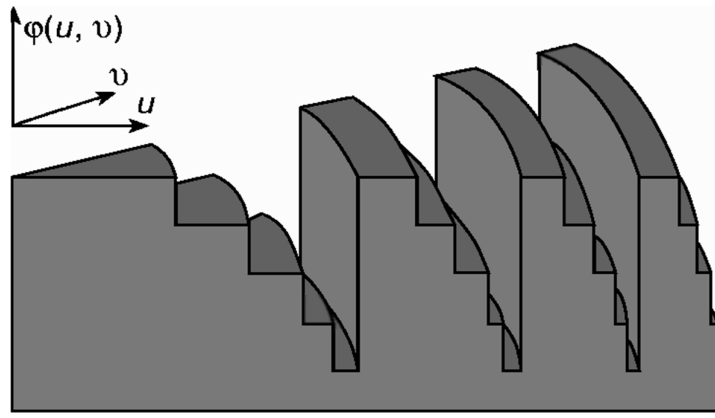


Рис. 5.5. Квантування фазової функції плоскої сферичної лінзи

Розглянемо зонну пластинку, що працює на відбивання, призначену для фокусування паралельного пучка. За нормального падіння максимальна висота мікрорельєфу визначається за формулою (5.8) і становить $\lambda/2$, що необхідно для забезпечення зсуву фази на 2π для прямого й оберненого ходу. У разі падіння під кутом ε_1

$$h_{\max} = \frac{\lambda}{2\cos\varepsilon_1}. \quad (5.14)$$

Рівняння меж зон Френеля відбивальної пластинки за нормального падіння відповідає рівнянню меж зон пропускної пластинки. Рівняння меж зон у разі похилого падіння є рівнянням еліпса, який являє собою проекцію кола на площину, нахилену на кут ε_1 .

Зонна пластика може діяти як два або декілька ДОЕ, розміщених на одній осі. Як приклад розглянемо дві схрещені циліндричні лінзи з різними фокусними відстанями, які мають фазові функції,

$$\varphi_1(x, y) = -\frac{\pi x^2}{\lambda f_1}; \varphi_2(x, y) = -\frac{\pi y^2}{\lambda f_2}. \quad (5.15)$$

Тоді фазова функція комбінованого ДОЕ (5.15) має вигляд

$$\varphi(x, y) = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x^2}{f_1} + \frac{y^2}{f_2} \right). \quad (5.16)$$

Межі зон Френеля мають форму еліпса. Дифракційний оптичний елемент з фазовою функцією (5.16) фокусує паралельний пучок у відрізок, перпендикулярний до оптичної осі.

5.1.2. Дифракційна ефективність амплітудних і фазових ДОЕ

Основною характеристикою ДОЕ є *дифракційна ефективність*, під якою розуміють відношення інтенсивності світла I_m m -го порядку, яка визначається за формулою (5.2), до інтенсивності світла I_0 , що падає на пластинку, тобто

$$\eta_m = \frac{I_m}{I_0}. \quad (5.17)$$

Дифракційна ефективність амплітудної пластинки Френеля першого порядку не перевищує 10,1 %, а фазо інверсної пластинки Релея–Вуда – 40,5%.

Під час дифракції світла на амплітудній синусоїдальній структурі утворюються три максимуми, які мають нульовий, +1-й і –1-й порядки (див. п. 2.7.3). Якщо пропускання такої ґратки змінюється в межах від 0 до 1, то дифракційна ефективність у нульовому порядку становить $\eta_0 = 25$ %, а в інших порядках $\eta_{+1} = \eta_{-1} = 6,25$ % (див. формулу (2.109)). Дифракційні ґратки з прямокутною періодичною структурою мають дифракційну ефективність (5.17): $\eta_{+1} = \eta_{-1} = 10,1$ %.

У фазових структурах поглинання немає, а амплітудний коефіцієнт пропускання $t(x) = \exp[\varphi(x)]$ є комплексною функцією, тому сума дифракційних ефективностей усіх порядків дорівнює 100 %. Якщо фазовий зсув $\varphi(x)$, що виникає під час проходження плоскої хвилі через таку структуру, змінюється за косинусоїдальним законом

$$\varphi(x) = \varphi_m \cos(2\pi\nu_{x0}x), \quad (5.18)$$

де φ_m і ν_{x0} – амплітуда і просторова частота фазової модуляції відповідно, то максимум дифракційної ефективності в ± 1 -х порядках структури (5.18) досягається за $\varphi_m = 1,84$ і становить $\eta_{+1} = \eta_{-1} = 33,9$ %. Для бінарної фазової структури, яка описується прямокутною періодичною функцією з фазовим зсувом $\varphi(x) = 0$ протягом однієї половини періоду і $\varphi(x) = \pi$ – протягом іншої, дифракційна ефективність становить $\eta_{+1} = \eta_{-1} = 40,4$ %, а усі парні порядки дифракції відсутні, тобто $\eta_{+2k} = \eta_{-2k} = 0$.

На структурі, фазовий зсув якої описується пилкоподібною функцією з лінійною зміною фази від 0 до $2\pi k$, формується лише один дифракційний максимум. Умовою стопроцентної ефективності в такому дифракційному порядку є синфазність усіх вторинних сферичних хвиль, які поширюються під кутом дифракції φ_{dm} . Ця умова означає нульову або кратну довжині хвилі світла різницю ходу всіх променів, які надходять до дифракційного максимуму. Різниця ходу променів, що поширюються із двох точок, які належать одному й тому самому періоду, лінійно зростає із збільшенням відстані між цими точками і досягає максимуму, коли відстань між точками дорівнює періоду структури.

5.1.3. Основні характеристики ДОЕ

Дифракційні оптичні елементи з мікроструктурою, просторова частота яких змінюється в радіальному, одному або двох взаємно перпендикулярних напрямках за заданим законом, називають *дифракційними лінзами* (ДЛ) й асферами відповідно. Дифракційна лінза має оптичну силу, яка виникає завдяки квадратичному члену в законі зміни просторової частоти. Якщо мікроструктура обертально симетрична, то ДЛ діє подібно до сферичної лінзи. Якщо закон зміни просторової частоти – плоска симетрична крива, то ДЛ діє подібно до циліндричної лінзи. Якщо просторова частота змінюється за різними законами у двох взаємно перпендикулярних напрямках, то ДЛ анаморфотна й еквівалентна двом схрещеним циліндричним лінзам з різними оптичними силами.

Дифракційними асферами або коректорами називають ДЛ з нульовою оптичною силою. Закони зміни їх просторової частоти мають члени більш високих порядків, ніж квадратичний, тому вони вносять асферичні поправки різних порядків аналогічно пластині Шмідта [2].

Під час проектування оптичних систем з ДЛ використовують декілька методів. Методи, основані на понятті ейконалу запису ДЛ, дозволяють легко отримати абераційні коефіцієнти в аналітичному вигляді, формувати системи

компенсаційних рівнянь для корекції аберацій.

Поняття ейконалу виникло з узагальненого підходу до опису голограм. Під час запису голограм реєструється інтенсивність інтерференції двох монохроматичних хвиль, при цьому амплітудний коефіцієнт пропускання голограми t_h пропорційний інтенсивності у цій точці інтерференційної картини [15]:

$$t_h \sim I = 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_r} (G_1 - G_2) \right], \quad (5.19)$$

де G_i – оптичний шлях між джерелом хвилі і певною точкою площини реєстрації, *ейконал хвилі*; λ_r – довжина хвилі під час запису.

Із виразу (5.19) видно, що амплітудний коефіцієнт пропускання записаного голографічним методом елемента можна подати як функцію ейконалу, яка дорівнює різниці ейконалів хвиль, які утворюють інтерференційну картину під час запису,

$$G = G_1 - G_2. \quad (5.20)$$

Під час освітлення такого елемента монохроматичною хвилею з фазою $\varphi = 2\pi G/\lambda$ безпосередньо за елементом ейконал хвильового поля в m -му порядку дифракції знаходять як

$$G_m = G + \frac{m\lambda}{\lambda_r} G_0. \quad (5.21)$$

Якщо підставити співвідношення (5.20) в (5.21), то можна бачити, що якщо фронт хвилі поновлення є точною копією фронту першої хвилі запису ($G = G_1$), то у разі виконання умови $\frac{m\lambda}{\lambda_r} = -1$ фронт хвилі, що формується в m -му порядку дифракції, буде точною копією фронту другої хвилі запису.

Фронт запису структури ДЛ подають у вигляді сферичних фронтів з доповненням асферичної поправки з коефіцієнтами b_3, b_5, b_7, \dots , тобто

$$G_0(r) = G_{1sph}(r) - G_{2sph}(r) - \frac{1}{8} b_3 r^4 - \frac{1}{16} b_5 r^6 - \frac{5}{128} b_7 r^8 - \dots, \quad (5.22)$$

де r – відстань від певної точки ДЛ до осі, яка проходить крізь центри кривизни хвиль, що беруть участь в інтерференції. Площина реєстрації інтерференційної картини перпендикулярна до осі z , у зв'язку з цим картина

буде обертальною і симетричною, а сама вісь є оптичною віссю ДЛ. За цих умов вираз для ейконалу запису ДЛ (5.22) матиме вигляд

$$G_0(r) = z_2 \sqrt{1 - \frac{r^2}{z_2^2}} - z_2 - z_1 \sqrt{1 - \frac{r^2}{z_1^2}} + z_1 - \frac{1}{8} b_3 r^4 - \frac{1}{16} b_5 r^6 - \frac{5}{128} b_7 r^8 - \dots \quad (5.23)$$

Під час виведення формули (5.23) вважалось, що ейконал розбіжної хвилі додатний, а збіжної хвилі – від’ємний. Знаки відрізків запису вибрані відповідно до прийнятих у прикладній оптиці правил знаків: якщо напрямок від поверхні до джерела збігається з напрямком поширення хвилі, то відстань до джерела додатна. Коефіцієнти b_i у виразі (5.23) відповідають коефіцієнтам розкладання функції (2.53).

Закон зміни просторової частоти мікроструктури ДЛ пов’язаний з ейконалом запису співвідношенням

$$\mathbf{v}_r(r) = \frac{1}{\lambda_r} \frac{\partial G_0}{\partial r}. \quad (5.24)$$

Фокусну відстань ДЛ на довільній довжині хвилі λ в m -му порядку дифракції обчислюють за формулою

$$f_{dl} = \frac{\lambda_r}{m\lambda} \frac{z_1 z_2}{z_1 - z_2}. \quad (5.25)$$

Коефіцієнт дисперсії ДЛ визначають як

$$V_{dl} = \frac{\lambda_r}{\lambda_{min} - \lambda_{min}}. \quad (5.26)$$

Для видимого діапазону за умови $\lambda_r = 0,5(\lambda_{min} - \lambda_{min})$ коефіцієнт (5.26) становить $\mathbf{v}_{dl} = -4$. Такі хроматичні властивості ДЛ, яка має оптичні характеристики (5.24) і (5.25), дозволяють успішно використовувати їх для хроматичної та апохроматичної корекції об’єктивів.

Завдяки унікальним фокусувальним та аберацийним властивостям ДЛ успішно застосовуються у пристроях запису/зчитування оптичних дисків, для корекції абераций в об’єктивах і телескопах, як інтраокулярні лінзи [16] тощо.

5.1.4. Оборнена задача дифракційної оптики

Оборнена задача полягає у створенні такої мікроструктури ДОЕ, яка забезпечила б задані властивості цього елемента, наприклад, для фокусування паралельного пучка променів у поздовжній або поперечний відрізок заданої довжини, кільце або в будь-яку геометричну фігуру. Дифракційні оптичні елементи такого типу називають *фокусаторами*.

Розглянемо для прикладу фокусатор, який перетворює паралельний пучок у кільце. Відповідні межі зон можна отримати комбінацією одновимірної дифракційної ґратки і зонної пластинки. Використаємо вузьку дифракційну ґратку, яка відхиляє монохроматичний пучок на певний кут у першому порядку. Якщо обертати таку ґратку навколо осі, як показано на рис. 5.6, *а*, отримаємо ДОЕ, зони якого мають прозорі й непрозорі концентричні кільця однакової ширини (рис. 5.6, *б*). Такі ДОЕ називають *дифракційними аксиконами*. Аксикон відхиляє вхідний пучок на певний тілесний кут у просторі. Для того, щоб зібрати дифраговані промені у фокальній площині, розмістимо зонну пластинку за аксиконом. Аксикон і зонну пластинку можна записати на одній основі.

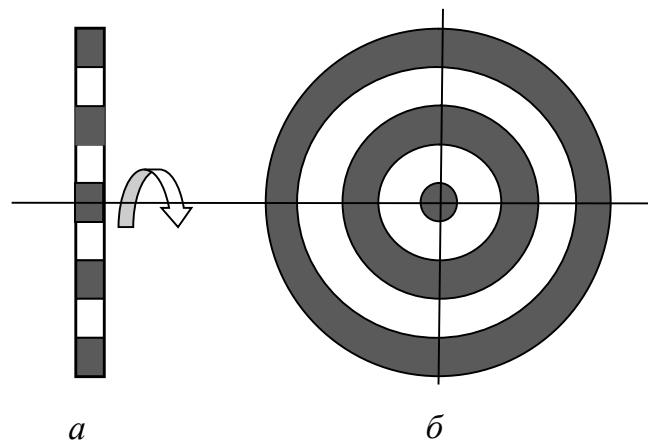


Рис. 5.6. Синтез дифракційного оптичного елемента: *а* – вузька ґратка; *б* – аксикон

Використовуючи розглянуту методику, можна побудувати різні фокусувальні ДОЕ. Наприклад, якщо записати на одній основі дві схрещені циліндричні лінзи з різними фокусними відстанями, то можна отримати ДОЕ, який фокусує паралельний пучок променів у відрізок, перпендикулярний до

оптичної осі.

Якщо радіуси зон Френеля змінюються за певним законом, то можна побудувати ДОЕ, який фокусує паралельний пучок у відрізок певної довжини, що розміщений уздовж оптичної осі. Для цього периферійна частина ДОЕ забезпечує фокусну відстань f_1 , а центральна $f_2 > f_1$. Між центральною і периферійною частинами ДОЕ мають бути записані зони Френеля, які забезпечують збільшення фокусної відстані від f_1 до f_2 .

Загальні методи визначення фазових функцій ДОЕ, які забезпечують задане перетворення, вимагають розв'язку обернених задач. Основна ідея полягає у визначенні межі й профілю ДОЕ, який забезпечує виконання таких умов [16]:

1. Задана інтенсивність $I_0(x_0, y_0) = |V_0(x_0, y_0)|^2$ у певній площині. До цього типу задач належить синтез програмованих дифракційних ґраток, фокусаторів випромінювання, плоских лінз, аксиконів і под.
2. Задана фаза $\varphi_0(x_0, y_0) = \arg[V(x_0, y_0)]$. До цього типу задач належить синтез формувачів хвильових фронтів і компенсаторів.
3. Задані модуль $|V(x_0, y_0)|$ і фаза $\varphi_0(x_0, y_0)$. Ця задача найбільш близька до задачі візуалізації 3D об'єкта, що характерно для голографії.

5.2. Габаритний розрахунок дифракційних лінз

Дифракційна лінза є найбільш важливим дифракційним елементом, який широко використовують у різних приладах. Розглянемо методику габаритного розрахунку, яка полягає у визначенні геометричних параметрів мікроструктури плоскої сферичної лінзи.

Фазова функція традиційної лінзи в параксіальному наближенні описується виразом (5.7). Етапи отримання плоскої лінзи [16] показано на рис. 5.7: фазову функцію (5.7) з початковим зсувом в центрі 6π (рис. 5.7, а), фазову функцію ідеальної плоскої лінзи, для якої фаза зведена до інтервалу $[0, 2\pi)$ (рис. 5.7, б) та реальний ступінчатий фазовий профіль плоскої лінзи, отриманий у результаті багатоступінчатого технологічного процесу виготовлення ДЛ (рис. 5.7, в).

Апроксимація неперервної фазової функції плоскої лінзи ступінчатим профілем можлива ступенями однакової ширини (рівномірна дискретизація) або ступенями однакової глибини (нерівномірна дискретизація), як на рис. 5.7,в. Для лінзи, показаної на рис. 5.7,в, за трьох рівнів квантування фази і трьох зон Френеля отримаємо $N = 9$ кільцевих модулів. Зовнішні радіуси кільцевих зон для M рівнів квантування фази визначають за формулою

$$R_q = \sqrt{\frac{2\lambda f q}{M}}. \quad (5.27)$$

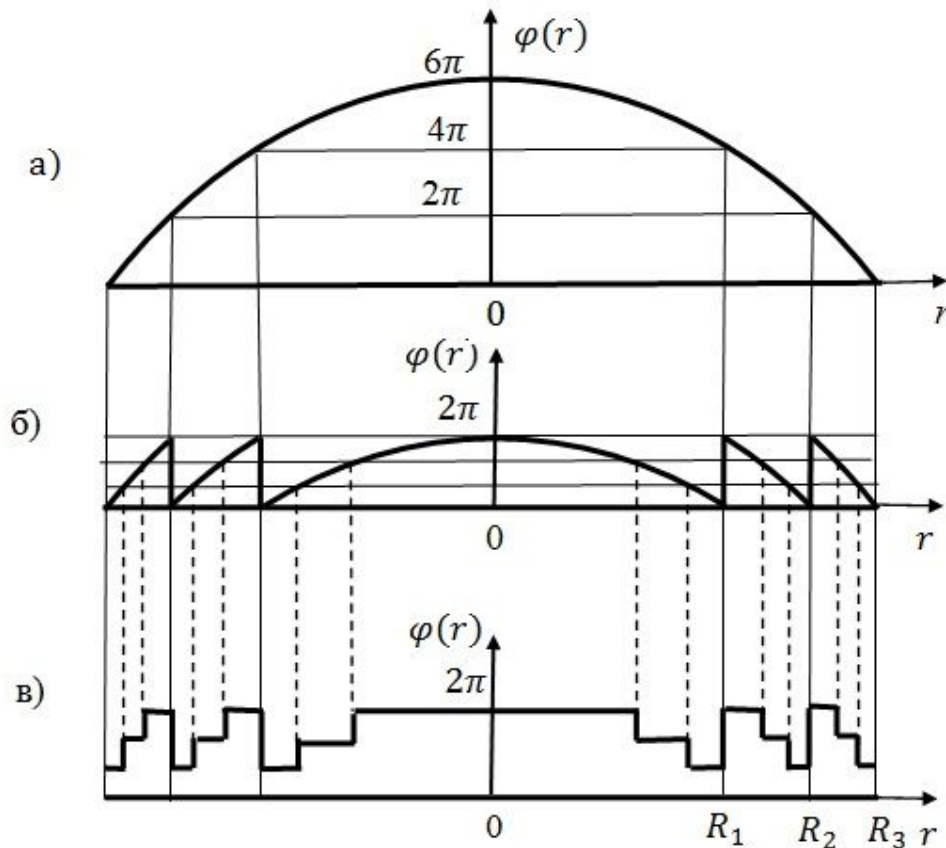


Рис. 5.7. Етапи отримання плоскої лінзи

Розглянемо методику розрахунку профілю мікрорельєфу плоскої ДЛ, тобто визначимо закон зміни товщини мікрорельєфу (рис. 5.8).

Нехай плоска ДЛ відповідає традиційній додатній лінзі із сферичними поверхнями, фазова функція якої в параксіальному наближенні визначається із формули (3.13), як

$$\varphi_l(x, y) = \varphi_l(r) = kn d_0 - \frac{kr^2}{2f}, \quad (5.28)$$

де d_0 – товщина лінзи на осі; n – показник заломлення матеріалу лінзи.

Враховуючи процес формування мікрорельєфу ДЛ, який зображено на рис. 5.7, визначимо максимальну висоту h_{\max} мікрорельєфу з умови, що різниця фаз, яку забезпечує ДЛ на початку і в кінці q -ї зони, дорівнює 2π , тобто $\Delta\varphi = \varphi(r_{q-1}) - \varphi(r_q) = 2\pi$, або $h_{\max}nk - h_{\max}k = 2\pi$, звідки $h_{\max} = \lambda/(n - 1)$, що збігається з формулою (5.8).

Для забезпечення фазової функції (5.28) традиційної лінзи фазова функція плоскої ДЛ для q -ї зони повинна мати вигляд

$$\varphi_{pl,q}(r) = 2\pi q - \frac{\pi r^2}{\lambda f}, \quad (5.29)$$

коли $\sqrt{2\lambda f(q - 1)} \leq r \leq \sqrt{2\lambda f q}$.

За умови (5.29) висота мікрорельєфу ДЛ у межах q -ї зони буде змінюватися за законом (5.9), який має вигляд

$$h_{pl,q}(r) = h_{\max} \left(q - \frac{r^2}{2\lambda f} \right), \quad (5.30)$$

коли $R_{q-1} \leq r \leq R_q$.

Якщо на ДЛ, що розміщена у площині xu , падає під кутом ε_1 паралельний пучок світла, який лежить у площині xz (рис. 5.8), то за цих умов висота мікрорельєфу ДЛ у межах q -ї зони (5.30) повинна змінюватися за законом [16]

$$h_{pl,q}(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi(\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon_1} - \cos \varepsilon_1)} \left(q - \frac{(x \cos \varepsilon_1)^2 + y^2}{2\lambda f} \right), \quad (5.31)$$

при цьому максимальна висота мікрорельєфу визначається за формулою

$$h_{\max} = \frac{\lambda}{(\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon_1} - \cos \varepsilon_1)}. \quad (5.32)$$

Мікрорельєфи, що описуються функціями (5.30) і (5.31) на основі неперервної фазової функції (5.28), називають *кусково-неперервними або мікрорельєфом з «блиском»*. Загальна товщина H оптичного елемента значно більша за h_{\max} з урахуванням основи (рис. 5.8).

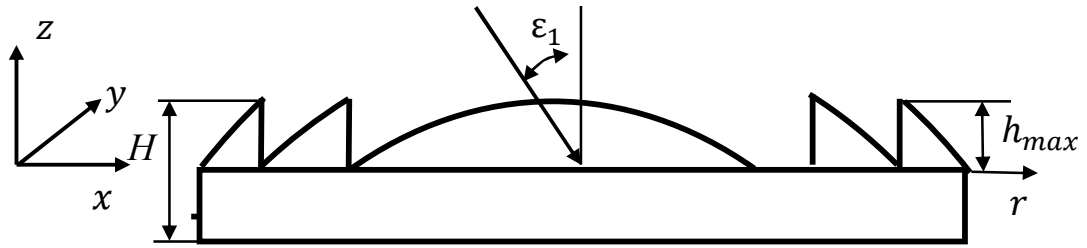


Рис. 5.8. Зведення фазової функції лінзи до інтервалу $[0, 2\pi)$

5.3. Розрахунок дифракційних оптичних елементів у наближенні геометричної оптики

5.3.1. Загальні положення

Вважатимемо ДОЕ тонким, для якого висота мікрорельєфу пропорційна розподілу ейконалу $\psi(x, y)$ світлового поля у площині безпосередньо за елементом. Наближення тонкого оптичного елемента дозволяє звести розрахунок ДОЕ до розрахунку ейконалу $\psi(x, y)$ світлового поля у площині $z = 0$ з умови фокусування хвильового поля з комплексною амплітудою

$$V(x, y) = V_0(x, y) \exp[jk\psi(x, y)] = V_0(x, y) \exp[j\varphi(x, y)] \quad (5.33)$$

у задану лінію (точку), де k – хвильове число, $k = 2\pi/\lambda$; $\varphi(x, y)$ – фазова функція.

Розрахунок поля (5.33) у наближенні геометричної оптики ґрунтується на розв'язку рівнянь ейконалу і перенесення, які наведені в розділі 1. Якщо середовище має показник заломлення $n(x, y, z)$, то рівняння ейконалу матиме вигляд

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = n^2, \quad (5.34)$$

Рівняння (5.34) є нелінійним диференціальним рівнянням у часткових похідних першого порядку, воно має бути доповнене межовими умовами, які визначають функцію ейконалу $\psi(x, y, z)$ на деякій заданій поверхні [17].

5.3.2. Проектування кіноформу в параксіальному наближенні

Кіноформ – це фазова голограма, в якій фазова модуляція здійснюється за рахунок мікрорельєфу поверхні. У більшості кіноформів максимальну

глибину мікрорельєфу обирають так, щоб для певної довжини хвилі максимальна фазова модуляція становила 2π . На відміну від лінзи Френеля, яка може працювати з некогерентним світлом, кіноформ працює з когерентним світлом.

Тонка дифракційна лінза. Розглянемо кіноформ (дифракційну лінзу) як оптичний елемент, що являє собою нескінченно тонкий фазовий елемент. Амплітудний коефіцієнт пропускання традиційної лінзи в параксіальному наближенні, як було обґрунтовано в розділі 3, описується неперервною вісесиметричною функцією

$$t_l(x, y) = \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (5.35)$$

У рівнянні (5.35) x та y є координатами у площині тонкої лінзи; λ – довжина хвилі світла; f – фокусна відстань лінзи. Бажано, щоб ДЛ мала такий самий коефіцієнт пропускання (5.35), як і традиційна лінза.

У підрозділі 2.3 було розглянуто процес перетворення світла зонною пластинкою Френеля, згідно з яким повний період зони визначають так, що оптична довжина шляху від початку q -ї зони дорівнює $f + q\lambda_0$, де λ_0 – довжина хвилі, для якої визначені зони. Отже, рівняння, яке визначає розміщення зон у площині xu в полярній системі координат $r^2 = x^2 + y^2$, має вигляд

$$R_q^2 = (f + q\lambda_0)^2 - f^2 = 2q\lambda_0 f + (q\lambda_0)^2. \quad (5.36)$$

У параксіальній області $r^2 \ll (f/q)^2$, або $(q\lambda_0)^2 \ll 2q\lambda_0 f$. Тоді рівняння (5.36) для параксіальної області запишемо як

$$R_{q,par}^2 = 2q\lambda_0 f. \quad (5.37)$$

Розглянемо ДЛ, зони якої розміщені на відстані, яка визначається рівнянням (5.37), а профіль поверхні кожної зони має параболічну форму. За таких умов ДЛ має фазову функцію

$$|\varphi_{doe}(x, y)| = \frac{2\pi}{\lambda_0} OPD(x, y), \quad (5.38)$$

де $OPD(x, y)$ – оптична різниця ходу (Optical Path Difference),

$$OPD(x, y) = [n(\lambda_0) - 1]d(x, y), \quad (5.39)$$

де $n(\lambda_0)$ – показник заломлення матеріалу лінзи для довжини хвилі λ_0 ; $d(x, y)$ – товщина лінзи у точці (x, y) . Оскільки максимальне значення фазової функції ДЛ (5.38) становить 2π , то $OPD(x, y)$ буде мати максимальне значення λ_0 . Отже, максимальну висоту рельєфу поверхні лінзи визначають за формулою

$$d_{\max} = \frac{\lambda_0}{n(\lambda_0)-1}. \quad (5.40)$$

Формула (5.40) збігається з формулою (5.8).

Дифракційна лінза з центральною симетрією також матиме вісесиметричну фазову функцію, яку в полярній системі координат з урахуванням рівняння (5.37) можна записати у вигляді

$$\varphi_{doe}(x, y) = \varphi_{doe}(r) = \alpha_{\Delta\lambda} 2\pi \left(q - \frac{r^2}{2\lambda_0 f} \right), \text{ коли } R_q \leq r < R_{q+1}. \quad (5.41)$$

Виконаємо заміну змінних у формулі (5.41) $\xi = r^2/2\lambda_0 f$. Тоді

$$\varphi_{doe}(\xi) = \alpha_{\Delta\lambda} 2\pi(q - \xi), \text{ коли } q \leq \xi < q + 1. \quad (5.42)$$

У рівняннях (5.41) і (5.42) параметр $\alpha_{\Delta\lambda}$ визначає частку фазової затримки від 2π , яка виникає для інших довжин хвиль, тобто

$$\alpha_{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_0 n(\lambda) - 1}{\lambda n(\lambda_0) - 1}. \quad (5.43)$$

Фазова функція (5.42) є періодичною функцією, а тому коефіцієнт пропускання ДЛ $t_{doe}(\xi) = \exp[j\varphi_{doe}(\xi)]$ також буде періодичною функцією, яку можна розкласти в ряд Фур'є, тобто

$$t_{doe}(\xi) = \exp[j\varphi_{doe}(\xi)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(j2\pi m \xi), \quad (5.44)$$

де

$$C_m = \exp[-j\pi(\alpha_{\Delta\lambda} + m)] \frac{\sin[\pi(\alpha_{\Delta\lambda} + m)]}{\pi(\alpha_{\Delta\lambda} + m)}.$$

Для додатної ДЛ у рівнянні (5.44) потрібно замінити m на $-m$, оскільки дійсне зображення формується додатними порядками дифракції. Після оберненої заміни змінних $\xi = r^2/2\lambda_0 f$ амплітудний коефіцієнт пропускання ДЛ (5.44) матиме вигляд

$$t_{doe}(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[-j\pi(\alpha_{\Delta\lambda} - m)] \times \text{sinc}[\pi(\alpha_{\Delta\lambda} - m)] \exp\left(-j2\pi \frac{r^2}{2\lambda_0 f} m\right). \quad (5.45)$$

Із рівнянь (5.35) і (5.45) видно, що ДЛ (5.11) має нескінченну кількість фокусних відстаней:

$$f_{doe} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{f_1}{m}. \quad (5.46)$$

Ефективність в m -му фокусі (5.46) визначається як

$$\eta_{doe} = C_m C_m^* = \text{sinc}^2[(\alpha_{\Delta\lambda} - m)]. \quad (5.47)$$

Розглянемо випадок, коли ДЛ використовує світло з довжиною хвилі $\lambda = \lambda_0$. Із формули (5.43) маємо, що коефіцієнт $\alpha_{\Delta\lambda} = 1$. Тоді із співвідношення (5.47) видно, що в першому фокусі за $m = 1$ ефективність ДЛ становить 100 %. Таке твердження справедливе тільки для параксіальної області, яка визначається діафрагмовим числом $k_{eff} = f/D_p$.

Розглянемо фазову функцію сферичної хвилі:

$$\varphi_{sph}(r) = \frac{2\pi}{\lambda} [z - \sqrt{z^2 + r^2}] \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left(-\frac{r^2}{2z} + \frac{r^4}{8z^3} - \dots \right). \quad (5.48)$$

У результаті використання функцій (5.45) і (5.48) у статті [18] було встановлено, що сферичну аберацію третього порядку знаходять за формулою

$$\pi_1(\lambda) = \frac{D_p}{2(4k_{eff})^3} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^3, \quad (5.49)$$

де D_p – діаметр вхідної зіниці ДЛ.

Поставимо завдання знайти профіль поверхні ДЛ, який забезпечує високу дифракційну ефективність і якість зображення. Для цього розглянемо оптичну різницю ходу $OPD(r) = \sqrt{f^2 + r^2} - f$, яка визначає фазову функцію ДЛ,

$$\varphi_{doe}(r) = \alpha_{\Delta\lambda} 2\pi \left(q - \frac{\sqrt{f^2 + r^2} - f}{\lambda_0} \right), \text{ коли } R_q \leq r < R_{q+1}, \quad (5.50)$$

де радіус зони R_q визначається рівнянням (5.36).

Зазначимо, що рівняння (5.50) збігається з рівнянням (5.41), якщо, розкладаючи функцію $\sqrt{1 + (r/f)^2}$ в ряд, обмежитись двома членами

розкладу. Якщо в рівнянні (5.50) замінити змінні

$$\xi = \frac{\sqrt{f^2 + r^2} - f}{\lambda_0}, \quad (5.51)$$

то воно матиме такий самий вигляд, як і рівняння (5.42).

Отже, ДЛ з фазовою функцією (5.50) формує на виході ідеальну сферичну хвилю для заданої довжини хвилі λ_0 і має дифракційну ефективність 100 %.

Розкладемо функцію $\sqrt{1 + (r/f)^2}$ у степеневий ряд (5.48) і підставимо її до формули (5.50). Порівнюючи функції (5.48) і (5.50) можна обчислити значення сферичної аберації третього порядку хвильового фронту в першому дифракційному порядку для фазового профілю за рівнянням (5.50):

$$\pi_1(\lambda) = \frac{D_p}{2(4k_{eff})^3} \left(\frac{\lambda^3 - \lambda_0^3}{\lambda_0^3} \right). \quad (5.52)$$

Рівняння (5.52) показує, що за умови $\lambda = \lambda_0$ $\pi_1(\lambda_0) = 0$. Це означає, що для розрахункової довжини хвилі λ_0 сферична аберація дорівнює нулю, а ефективність ДЛ визначається за формулою (5.47).

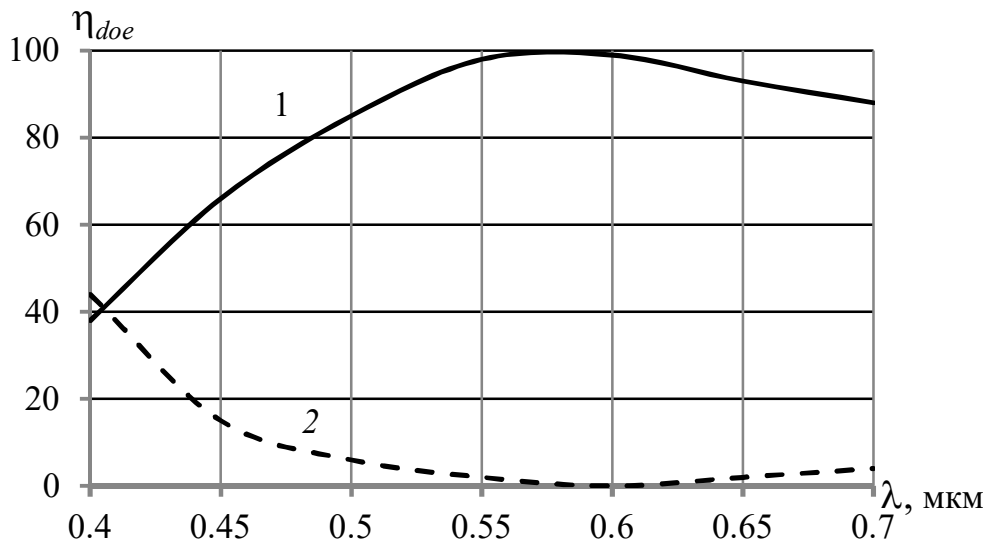


Рис. 5.9. Залежність дифракційної ефективності від довжини хвилі, коли для розрахунку ДЛ використовувалась довжина хвилі $\lambda_0 = 0,588$ мкм: 1 – $m = 1$; 2 – $m = 2$

Розглянемо тепер залежність дифракційної ефективності та аберацій від довжини хвилі. Дифракційна ефективність m -го порядку визначається формулою (5.47), а її залежність від довжини хвилі для перших двох порядків

показано на рис. 5.9. Із наведених графіків видно, що для першого дифракційного порядку дифракційна ефективність $\eta_{doe} = 1,0$, коли $\lambda = \lambda_0$.

Дифракційна лінза певної товщини. Розглянемо ДЛ, яка має певну товщину мікрорельєфу. В основу проектування таких лінз покладено принцип Ферма, згідно з яким оптична довжина шляху від будь-якої точки поверхні зони до фокальної площини однакова. Очевидно, що з переходом з однієї зони в іншу довжина оптичного шляху збільшується на одну довжину хвилі λ_0 .

Для розрахунку відстані $h(r)$ від дотичної площини до поверхні лінзи використаємо рис. 5.10. Прогин (відхилення) $h(r)$ має бути розрахований таким чином, щоб оптична довжина шляху в межах q -ї зони була однаковою для різних точок зони. Межі зон визначаються рівнянням (5.36). Для забезпечення незмінності оптичної довжини шляху повинна виконуватись рівність

$$-n(\lambda_0)h(r) + (f + q\lambda_0) = \sqrt{[f - h(r)]^2 + r^2}. \quad (5.53)$$

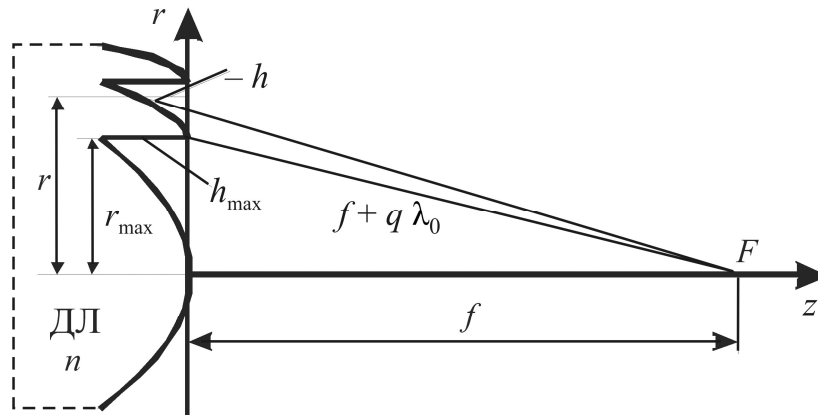


Рис. 5.10. Схема для розрахунку профілю $h(r)$ мікрорельєфа ДЛ кінцевої (певної) товщини

Профіль $s(r)$ q -ї зони визначимо з рівняння (5.53), де згідно з обраною системою координат (рис. 5.10) функція $s(r)$ має від'ємний знак. Рівняння (5.53) можна записати у вигляді

$$\frac{[h(r)-h_0]^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1, \quad (5.54)$$

де

$$h_0 = \frac{n(\lambda_0)[f+q\lambda_0]-f}{n^2(\lambda_0)-1}; \quad (5.55a)$$

$$a^2 = \frac{[n(\lambda_0)f-f-q\lambda_0]^2}{[n^2(\lambda_0)-1]^2}; \quad (5.55b)$$

$$b^2 = \frac{[n(\lambda_0)f-f-q\lambda_0]^2}{n^2(\lambda_0)-1}. \quad (5.55b)$$

Отже, з рівняння (5.54) видно, що поверхня кожної зони описується гіперболоїдом обертання з ексцентриситетом

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = n(\lambda_0), \quad (5.56)$$

тобто ексцентриситет (5.56) визначається показником заломлення матеріалу лінзи для довжини хвилі λ_0 .

Рівняння (5.54) можна подати у стандартному вигляді:

$$s(r) = \frac{q\lambda_0}{n(\lambda_0)-1} + \frac{cr^2}{1+\sqrt{1-(k+1)c^2r^2}}. \quad (5.57)$$

У рівнянні (5.57) константи c та k визначають параксіальну кривизну і кінчну постійну відповідно. В явному вигляді ці константи можна отримати з рівнянь (5.55):

$$c = \frac{1}{f[n(\lambda_0)-1]+q\lambda_0}; k = -n^2(\lambda_0). \quad (5.58)$$

Перший доданок у правій частині рівняння (5.57) являє собою просту корекцію, яка забезпечує нульове значення на межі кожної зони.

Розглянемо тонку ДЛ у непараксіальному наближенні, яка має фазову функцію (5.50). Порівнюючи фазову функцію (5.50) з фазовою затримкою тонкою ДЛ,

$$\varphi_d(r) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [n(\lambda_0) - 1] s_{thin}(r), \quad (5.59)$$

можна отримати рівняння, аналогічне рівнянню (5.57), параметри якого (5.58) мають вигляд

$$c_{thin} = \frac{1}{f[n(\lambda_0)-1]}; k_{thin} = -[n(\lambda_0) - 1]^2 - 1. \quad (5.60)$$

Із рівнянь (5.58) і (5.60) видно, що врахування кінцевої товщини профілю лінзи спричиняє незначні зміни.

Моделювання дифракційної лінзи у програмах розрахунку оптичних

систем. Традиційні програми розраховують хід відповідних променів через оптичну систему на основі закону Снеліуса. Складна поверхня ДЛ робить такий розрахунок значно складнішим порівняно з безперервною оптичною поверхнею. Об'єм розрахунків істотно збільшується, оскільки число дифракційних зон може бути більшим від 100. Крім того, програма розрахунку має розпізнавати номер дифракційної зони.

У більшості випадків ДЛ можна розглядати як плоский елемент, еквівалентний плоско-опуклій звичайній лінзі з надвисоким показником заломлення. За таких умов кривизна поверхні ДЛ визначається як

$$c = \frac{1}{f[1-n(\lambda_0)]}. \quad (5.61)$$

Як було показано вище, параксіальна і непараксіальна моделі ДЛ мають однакові властивості для першого порядку, але різні аберації. Кривизна поверхні зони (5.61) визначає параксіальну фокусну відстань та абераційний внесок сферичної поверхні.

Для зменшення аберацій поверхні дифракційних зон обирають асферичними. Щоб знайти відповідні коефіцієнти асферичності розкладають фазову функцію (5.50) у степеневий ряд. Рівність коефіцієнтів аберацій вимагає, щоб для параксіального випадку всі коефіцієнти опуклості поверхні дорівнювали нулю, тоді як для непараксіального випадку кінчна поверхня має вигляд $k = -n^2(\lambda_0)$. Хроматичну зміну фокусної відстані розраховують за формулою (5.43) з урахуванням надвисокого показника заломлення $n(\lambda)$. На хроматичні аберації впливає товщина ДЛ, яку розглядають як плоскопаралельну пластинку, виготовлену з матеріалу лінзи із звичайним показником заломлення.

Розглянута модель ДЛ не враховує формування великої кількості зображень для різних фокусних відстаней певних порядків. Ці зображення створюють нерівномірний фон для основного зображення ($m = 1$), що погіршує функцію розсіювання точки (ФРТ) дифракційної лінзи. Крім того, для немонохроматичного світла формується велика кількість монохроматичних

зображень, властивості яких залежать від параметра $\alpha_{\Delta\lambda}$, що визначається формулою (5.43), зі збільшенням відносного отвору ДЛ порушується наближення Френеля і розрахунки ФРТ на основі теорії дифракції стають більш неточними.

Використовуючи рівняння дифракції Френеля для певної зони можна отримати вираз для розподілу інтенсивності уздовж осі ДЛ. У статті [19] наведено такий вираз:

$$I(0,0,z) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi\lambda_0 f N}{\lambda z}\right)}{(\pi N)^2 \left(1 - \frac{\alpha_{\Delta\lambda} \lambda z}{\lambda_0 f}\right)^2} \left[\cos(\pi\alpha_{\Delta\lambda}) - \frac{\sin(\pi\alpha_{\Delta\lambda})}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\lambda_0 f N}{\lambda z}\right)} \right]^2. \quad (5.62)$$

Дифракційну ефективність для певної довжини хвилі можна розрахувати за формулою (5.47).

Отже, ДЛ може служити високоефективним оптичним елементом, що формує високоякісні хвильові фронти. Якщо відносний отвір менший від 1:10, то для розрахунку ДЛ можна використовувати параксіальне наближення. Ширина спектра світла впливає на дифракційну ефективність і аберації ДЛ.

5.3.3. Фазова лінза, яка працює у збіжному світловому пучку

Розглянемо метод проектування фазової лінзи Френеля, описаний у статті [19]. Звичайна лінза Френеля, яка працює в монохроматичному світлі, подібна до однофокусної рефракційної лінзи. Зменшення висоти мікроструктури зон Френеля до значень, за яких створюється затримка на половину довжини хвилі, та освітлення її сферичною хвилею, що сходиться, призводить до формування двох фокусів. Фокус нульового порядку дифракції розміщений у центрі кривизни хвилі, а фокус +1-го порядку дифракції – ближче до лінзи.

Якщо апертура лінзи достатньо велика, то фокусні відстані можна розрахувати за формулами геометричної оптики. Зі зменшенням апертури на положення фокусів починає впливати дифракція на апертурі, що спричиняє зміщення фокусної фокальної площини. Величину зміщення можна визначити теоретично із розподілу інтенсивності уздовж осі в наближенні

Кірхгофа, яке наведено в розділі 2. Крім того, зі зменшенням кількості зон лінза перетворюється в однофокальну (якщо відкрита тільки одна центральна зона), з розширенням і взаємним перекриттям функцій розподілу інтенсивності в нульовому та +1-му порядках. Подібна ситуація виникає у біфокальних дифракційно-рефракційних інтраокулярних лінзах (штучних кришталиках ока) у разі зменшення діаметра зіниці ока (див. п. 5.6).

Дифракція на круглій апертурі. Під час проходження паралельного пучка світла через діафрагму відбувається дифракція світла у вигляді сферичних збіжних і розбіжних хвиль. Цим хвилям відповідають дійсні фокуси F_{+m} та уявні фокуси F_{-m} , розміщені від діафрагми на відстанях

$$f_{+m} = \frac{r_p^2}{m\lambda}; \quad f_{-m} = -\frac{r_p^2}{m\lambda}, \quad (5.63)$$

де r_p – радіус апертури; $m = 1, 3, 5, \dots$ – непарні числа Френеля (рис. 5.11). Найбільша інтенсивність світла зосереджена у фокусі F_{+1} . Наприклад, якщо $r_p = 1$ мм, то для довжини хвилі $\lambda = 0,55$ мкм $f_{+1} = 1818$ мм.

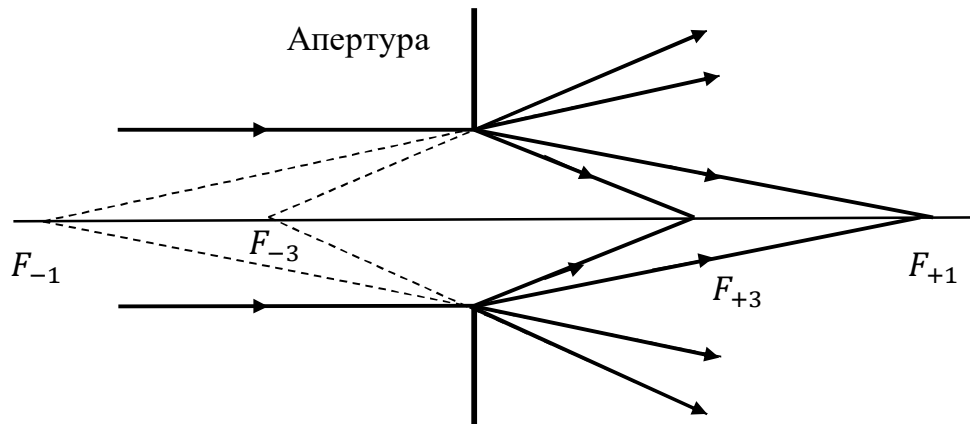


Рис. 5.11. Дифракція світла на круглій апертурі

Фокальне зміщення. Освітлення діафрагми збіжним світловим пучком еквівалентно розміщенню додатної рефракційної лінзи з фокусною відстанню f_0 до або після діафрагми (рис. 5.12). У цьому випадку по різні сторони від фокуса лінзи F_0 , який формується пучком, що проходить крізь діафрагму без відхилення, будуть сформовані зображення додатних A_{+m} і від’ємних A_{-m} дифракційних фокусів. Відстані від лінзи до цих фокусів знаходять за

формулами

$$s_{+m} = \frac{f_0 f_{+m}}{f_0 + f_{+m}}; \quad s_{-m} = \frac{f_0 f_{-m}}{f_0 + f_{-m}}, \quad (5.64)$$

де фокусні відстані $f_{\pm m}$ визначають з формули (5.63).

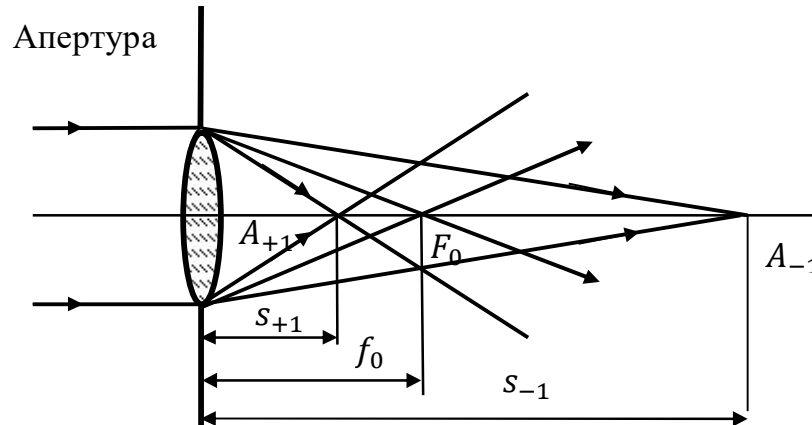


Рис. 5.12. Дифракція світла на круглій апертурі у збіжних пучках

Із формул (5.64) випливає, що усі фокуси A_{+m} будуть дійсними незалежно від значення і лежать між лінзою та її фокусом F_0 . Фокуси A_{-m} будуть дійсними і лежатимуть за фокусом лінзи F_0 , коли $f_{-m} > f_0$, а коли $f_{-m} < f_0$ будуть уявними і лежатимуть перед лінзою.

Розподіл інтенсивності уздовж осі за лінзою визначається сумою інтенсивностей, які формують усі фокуси F_0 , A_{+m} та A_{-m} . Особливо великий вплив на положення загального (результуючого) фокуса, тобто максимуму інтенсивності, мають промені, які фокусуються в точках A_{+1} й A_{-1} , де інтенсивність найбільша. Формування фокусів A_{+1} , F_0 і A_{-1} показано на рис. 5.12.

Якщо $f_0 = 20$ мм і $r_p = 0,1$ мм, то $S_{-1} = 109$ мм, $S_{+1} = 11$ мм, тобто $(S_{-1} - f_0) \gg (f_0 - S_{+1})$. За таких умов положення фокуса A_{+1} сильніше впливає на положення результуючого максимуму, ніж положення фокуса A_{-1} , що призводить до зміщення максимуму ближче до лінзи. Промені, які утворюють фокус A_{-1} , змінюють, переважно, тільки симетрію розподілу інтенсивності уздовж осі. Із збільшенням радіуса діафрагми r_p значення S_{+1} і S_{-1} наближаються до фокусної відстані лінзи f_0 і за $r_p = 1$ мм відрізняються

від нього менше ніж на 1 %. Залежності S_{+1} і S_{-1} від радіуса r_p апертурної діафрагми лінзи, яка має фокусну відстань 20 мм, зображено на рис. 5.13. Ці залежності розраховані за формулами (5.63) і (5.64). Більш точний розподіл інтенсивності уздовж осі можна розраховувати за допомогою теорії дифракції Кірхгофа, поданої в розділі 2.

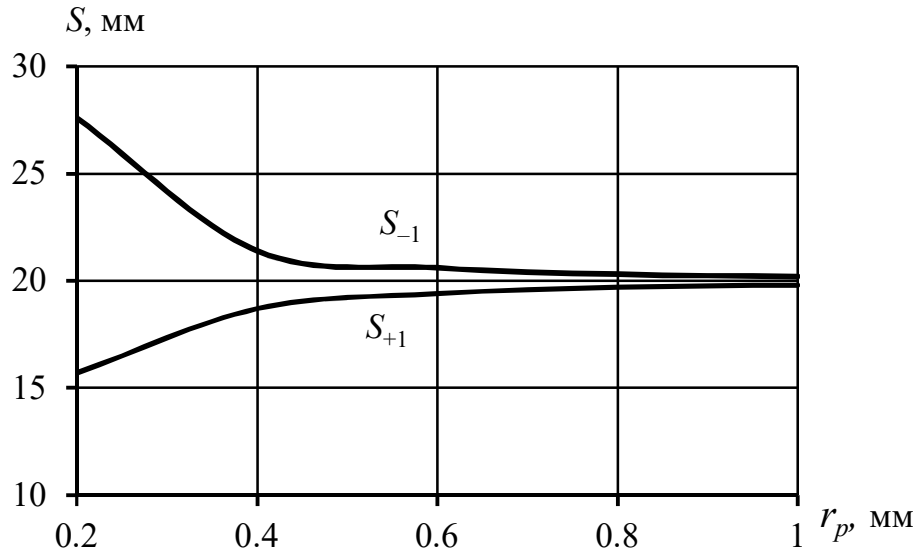


Рис. 5.13. Залежність положення $+1$ -го і -1 -го фокусів під час дифракції світла у збіжних пучках

Для фазової лінзи Френеля з висотою мікрорельєфу, що створює затримку на половину довжини хвилі, яка встановлена після рефракційної лінзи, будуть справедливими усі наведені вище співвідношення. На розподіл інтенсивності впливатиме також число відкритих зон. Якщо за малих діаметрів діафрагми відкрита одна центральна зона, то лінза перетворюється в монофокальну, а якщо менше двох зон, то можливе порушення біфокальності через взаємний вплив функцій розподілу інтенсивності в нульовому та $+1$ -му фокусах. Для усунення цього недоліку вводиться фазовий зсув у дифракційну структуру лінзи Френеля, який зміщує зони ближче до центру.

5.3.4. Проектування лінз Френеля на сферичній поверхні

В цьому підрозділі розглядається метод проектування лінзи Френеля, сферичні поверхні якої відповідають корпусу приладу і не узгоджені з фокусною відстанню лінзи. Це означає, що лінза Френеля створюється на сферичній поверхні з заданими радіусами кривизни.

В основі методу лежить перетворення паралельного пучка променів у промені, які збігаються в заданому фокусі. Процес проектування полягає у використанні закону Снеліуса для визначення профілю канавок на одній із сферичних поверхонь лінзи. В результаті отримаємо лінзу Френеля з канавками постійної ширини та змінної глибини. Канавки будуть плоскими і неглибокими біля центру лінзи та глибокими і круто нахиленими на периферії. Метод постійної ширини канавок дозволяє точно визначити положення вершини кожної канавки і спрощує математичні обчислення, що наведені в статті [20].

Проектування відбувається в наступному порядку. Розробник приладу задає фокусну відстань лінзи, радіуси сферичних поверхонь і показник заломлення матеріалу (корпусу приладу). Спочатку обирається із технологічних міркувань ширина канавок достатньо великого розміру для зменшення впливу дифракційних ефектів. Поверхню лінзи розбиваємо на концентричні канавки з плоскою основою, до яких застосовуємо закон Снеліуса. Кожна канавка має різні фокусні відстані у поперечному перерізі. Вилучаємо найбільші розбіжності у фокусних відстанях методом наближення дна плоскої канавки до асферичної лінзи (рис. 5.14):

$$z(x') = \frac{cx'^2}{1 + \sqrt{1 - c^2(k+1)x'^2}} + a_1x'^4 + a_2x'^6 + a_3x'^8, \quad (5.65)$$

де c, k, a_m – сферичний, конічний і асферичні коефіцієнти; x' – відстань (радіус) від центра (осі) лінзи; z – відстань асферичної поверхні лінзи до площини $x'y'$, дотичної до лінзи. Центр кривизни поверхні знаходиться в точці O . Початок системи координат $x'z$ знаходиться на поверхні лінзи, оптична вісь якої співпадає з віссю z . $c = 1/R_2$ – кривизна поверхні, де R_2 –

радіус кривизни поверхні, на якій нанесена мікроструктура ДЛ. Для сферичної поверхні $k = 0$, для параболоїда $k = -1$.

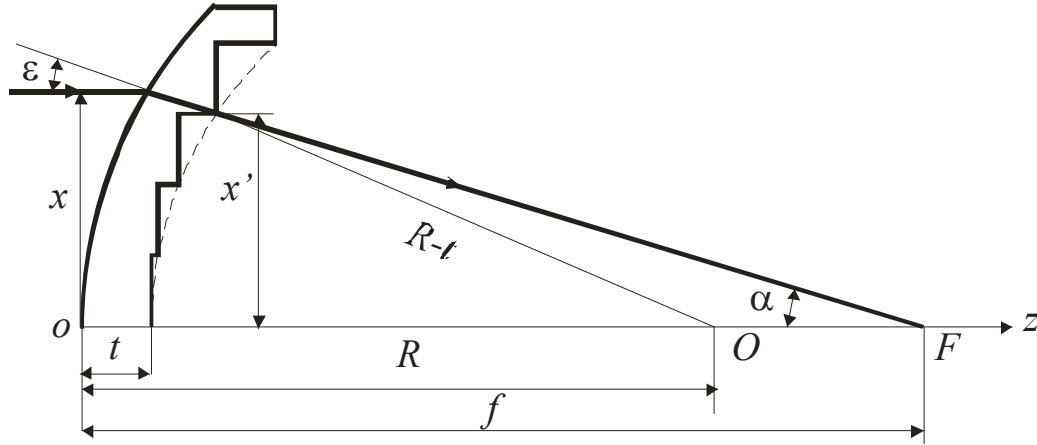


Рис. 5.14. Хід променя у сферичній лінзі Френеля

Розглянемо два випадки, коли поверхня канавок зон Френеля плоска з кутом нахилу δ і коли поверхня канавок має сферичну форму.

Плоска поверхня зон Френеля. Метод проектування враховує загальну товщину матеріалу лінзи (корпусу) і розташовує вершину кожної канавки на сферичній поверхні. Проектування таких лінз Френеля більш складне, ніж проектування лінз з плоскими поверхнями. У сферичних лінз зовнішня поверхня заломлює падаючий промінь. Ми повинні узгодити поверхню канавки із зовнішньою поверхнею так, щоб вони в сукупності давали задану фокусну відстань. За цих умов необхідно розрахувати кут нахилу поверхні кожної канавки, якщо відоме положення вершини кожної канавки. Для цього використаємо рис. 5.14, із якого запишемо систему рівнянь:

$$\sin \varepsilon = \frac{x}{R}; \quad (5.66)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x'}{f - R + \sqrt{(R-t)^2 - x'^2}}; \quad (5.67)$$

$$\sin \varepsilon = n \sin \varepsilon'; \quad (5.68)$$

$$\sin(\alpha + \delta) = n \sin(\varepsilon - \varepsilon' + \delta), \quad (5.69)$$

де R – радіус першої поверхні лінзи; f – фокусна відстань; t – товщина матеріалу корпусу (лінзи); δ – кут нахилу канавки (рис. 5.15).

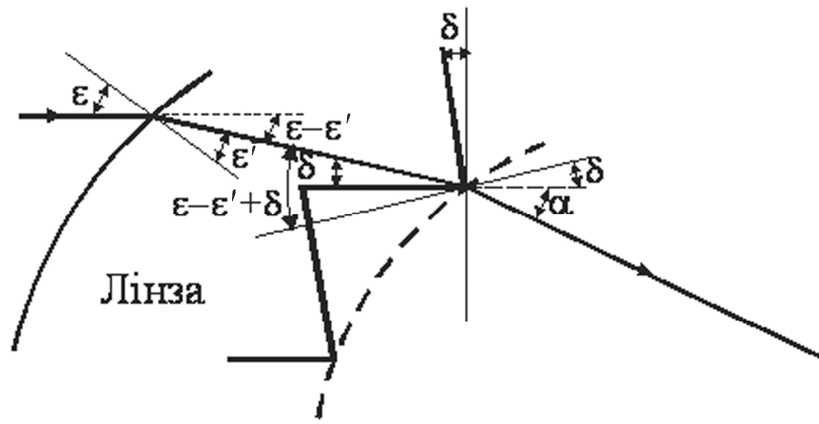


Рис. 5.15. Хід променів через лінзу Френеля з урахуванням нахилу дна канавки

З більш детального аналізу проходження променя через лінзу Френеля з урахуванням кута нахилу дна канавки δ (рис. 5.16) видно, що верхня (бокова) поверхня канавки залишається горизонтальною. Промінь падає на першу сферичну поверхню в точці x і виходить із лінзи в точці x' . Використовуючи закон Снеліуса (5.69), можна встановити залежність між координатами точки падіння x і точки виходу променя із лінзи x' та кутом нахилу канавки δ :

$$\operatorname{tg} \delta(x, x') = \frac{\sin \varepsilon(x) - n \sin[\varepsilon(x) - \varepsilon'(x')]}{n \cos[\varepsilon(x) - \varepsilon'(x')] - \cos \varepsilon(x)}. \quad (5.70)$$

Щоб використати рівняння (5.70) потрібно знайти точку падіння променя x та вершини канавки x' . Хід променя через задану вершину канавки зображено на рис. 5.16. Кут заломлення ε' близький до нуля, а зміщення променя $x - x'$ у лінзі мале порівняно з товщиною лінзи t , тоді $t' \approx t$. Значення x можна знайти із системи рівнянь

$$\frac{t}{c} \approx \cos \varepsilon'; \quad \frac{x - x'}{c} = \sin(\varepsilon - \varepsilon'). \quad (5.71)$$

Розв'язком системи рівнянь (5.71) є функція

$$x = x' + \frac{t \sin[\varepsilon(x) - \varepsilon'(x')]}{\cos[\varepsilon'(x')]} \quad (5.72)$$

Запишемо співвідношення (5.72) через конструктивні параметри лінзи, використовуючи формули (5.66) і (5.68)

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= \frac{x}{R} \rightarrow \varepsilon = \arcsin \frac{x}{R}; \\ \sin \varepsilon &= n \sin \varepsilon' \rightarrow \varepsilon' = \arcsin \left(\frac{\sin \varepsilon}{n} \right) = \arcsin \left(\frac{x}{nR} \right). \end{aligned}$$

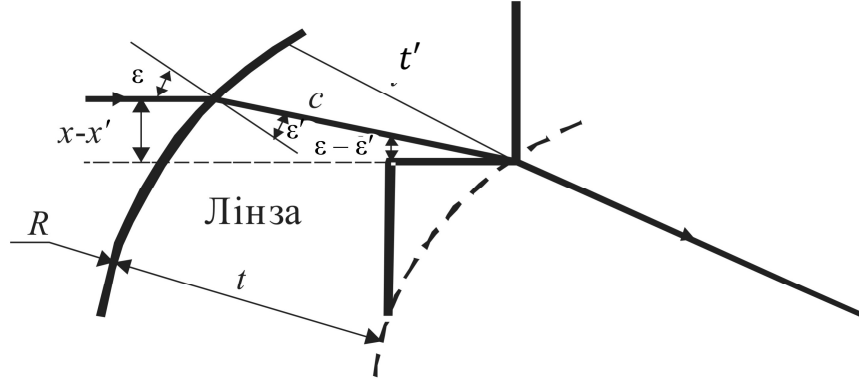


Рис. 5.16. До визначення співвідношення між вершиною канавки x' і точкою x падіння променя на сферичну поверхню

Тоді

$$\begin{aligned}
 x &= x' + t \frac{\sin \epsilon \cos \epsilon' - \sin \epsilon' \cos \epsilon}{\cos \epsilon'} = x' + t \left(\frac{x}{R} - \operatorname{tg} \epsilon' \cos \epsilon \right) = \\
 &= x' + t \left[\frac{x}{R} - \frac{\frac{x}{nR}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{nR} \right)^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2} \right] = x' + t \frac{x}{R} - t \frac{x \sqrt{R^2 - x^2}}{R \sqrt{(nR)^2 - x^2}}.
 \end{aligned}$$

Запишемо останнє рівняння у вигляді

$$x - t \frac{x}{R} + t \frac{x \sqrt{R^2 - x^2}}{R \sqrt{(nR)^2 - x^2}} = x'. \quad (5.73)$$

Розрахувавши значення координати x із рівняння (5.73) можна знайти кут нахилу канавки δ за формулою (5.70).

Для підвищення точності розрахунків можна використати початкові координати не вершини канавки, а центру дна канавок. Водночас лінза має канавки різної глибини, що викликає певні труднощі під час знаходження цього центру.

Аберації лінзи Френеля можна зменшити, якщо плоске дно канавок з певним нахилом замінити асферичною поверхнею (5.65). Нахил такої поверхні у будь-якій точці визначається похідною функції (5.65), тобто

$$\begin{aligned}
 \frac{dz(x')}{dx'} &= \frac{2cx'}{1 + \sqrt{1 - c^2(k+1)x'^2}} + \frac{c^3 x'^3}{\left[1 + \sqrt{1 - c^2(k+1)x'^2} \right]^{1/2} \sqrt{1 - c^2(k+1)x'^2}} + \\
 &+ 4a_1 x'^3 + 6a_2 x'^5 + 8a_3 x'^7.
 \end{aligned} \quad (5.74)$$

Використовуючи метод Левенберга–Маркварта, можна узгодити

рівняння (5.74) з кутом нахилу канавки δ і координатою її вершини x' [20].

Таким чином, друга поверхня лінзи складається з асферичних канавок, вершини яких розміщені на сферичній поверхні. Геометричні параметри цієї поверхні описуються рівняннями

$$z_{st,q}(x') = \frac{c(qW_{st})^2}{1 + \sqrt{1 - c^2(k+1)(qW_{st})^2}} + a_1(qW_{st})^4 + a_2(qW_{st})^6 + a_3(qW_{st})^8; \quad (5.75)$$

$$z_r(x') = \sqrt{(R - t)^2 - (qW_{st})^2}; \quad (5.76)$$

$$Z_1(x') = z(x') - z_{st,q}(x') + z_r(x'), \quad (5.77)$$

$$Z_2(x') = t + z(x'), \quad (5.78)$$

де q – номер канавки, рівний цілій частині x'/W_{st} ; W_{st} – ширина канавки; t – товщина матеріалу лінзи між зовнішньою поверхнею лінзи і вершиною канавки; x' – відстань від центра лінзи; $Z_1(x')$ – координата точки на другій поверхні лінзи відносно центра кривизни O першої поверхні лінзи (рис. 5.14); $Z_2(x')$ – відстань від площини xu (від осі x) до другої поверхні, на якій розташована лінза Френеля.

Для плоскої поверхні дна канавки рівняння (5.65) буде рівнянням прямої

$$z(x') = z(qW_{st}) - (x' - qW_{st})\text{tg}\delta, \quad (5.79)$$

де $\text{tg}\delta$ – визначається співвідношенням (5.70), а x' змінюється в межах $qW_{st} \leq x' \leq (q + 1)W_{st}$.

Рівняння (5.75) розділяє асферичну поверхню на окремі канавки уздовж прямої лінії, паралельній осі x . Рівняння (5.76) визначає положення канавки відносно центра O і розташовує канавку уздовж цього радіуса. Рівняння (5.77) і (5.78) об'єднують рівняння (5.65), (5.76) та (5.77) і визначають поверхню лінзи Френеля. В статті [20] використано рівняння (5.77). Ці рівняння можна використати для керування процесом виготовлення еталонної лінзи Френеля методом алмазного точіння.

Для покращення технології виготовлення лінзи Френеля жолобок (поверхня) кожної канавки має кут нахилу $\delta = 1^\circ$, а радіус заглиблення канавки становить 2 мкм. Це покращує процес механічної обробки поверхні

та процес лиття під тиском.

Сферична поверхня зон Френеля. Перевагою ДЛ з плоскою поверхнею зон Френеля є простота їх виготовлення. В той же час така поверхня діє як оптичний клин, що призводить до значних аберацій ДЛ.

Розглянемо спрощені методи розрахунку кута нахилу поверхні зон Френеля і радіуса та центра сферичної поверхні зон Френеля, які детально розглянуті в статті [21].

Із трикутника OBD(рис. 5.17) маємо:

$$\cos\beta = \frac{x'}{R-t} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{x'}{R-t}\right). \quad (5.80)$$

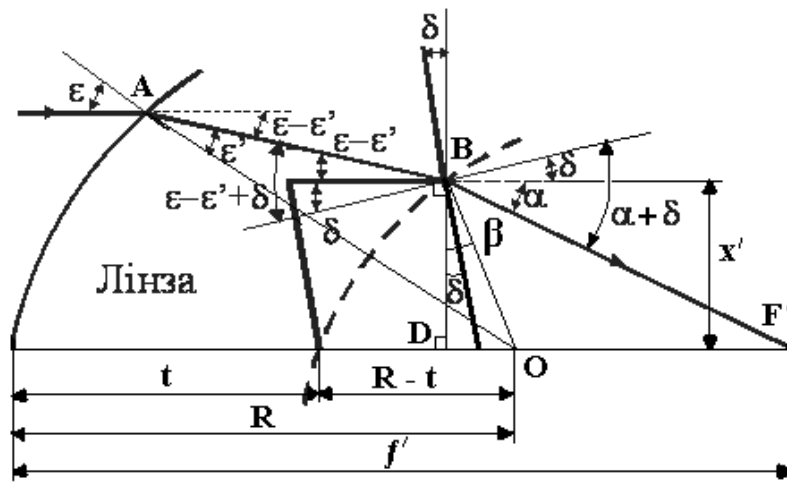


Рис. 5.17. Хід променів у лінзі Френеля, деталізований

Із трикутника ABO за теоремою синусів маємо:

$$\frac{\sin(\beta+90^\circ+\varepsilon-\varepsilon')}{R} = \frac{\sin\varepsilon'}{R-t}. \quad (5.81)$$

Із системи рівнянь (5.80), (5.81) і (5.68) знаходимо кути падіння ε і заломлення ε' променя на першій поверхні. За формулою (5.69) знаходимо кут α, який дозволяє розрахувати кут нахилу канавки δ, що знаходиться на певній відстані x' від оптичної осі лінзи.

Розглянемо тепер метод розрахунку радіуса R_q і центра C_q поверхні q-ої зони Френеля (рис. 5.18). Нехай в межах q-ої зони зовнішня і внутрішня поверхні утворюють звичайну лінзу з двома сферичними поверхнями. Оскільки відомо, що промінь, який пройшов через вершину канавки точно заломиться у фокус цієї лінзи, то, не враховуючи сферичну аберацію лінзи,

можна стверджувати, що плоска канавка є дотичною до сферичної поверхні лінзи. Радіус R_q і центр C_q цієї поверхні однозначно визначаються положенням вершини плоскої канавки x'_q і кутом її нахилу δ_q .

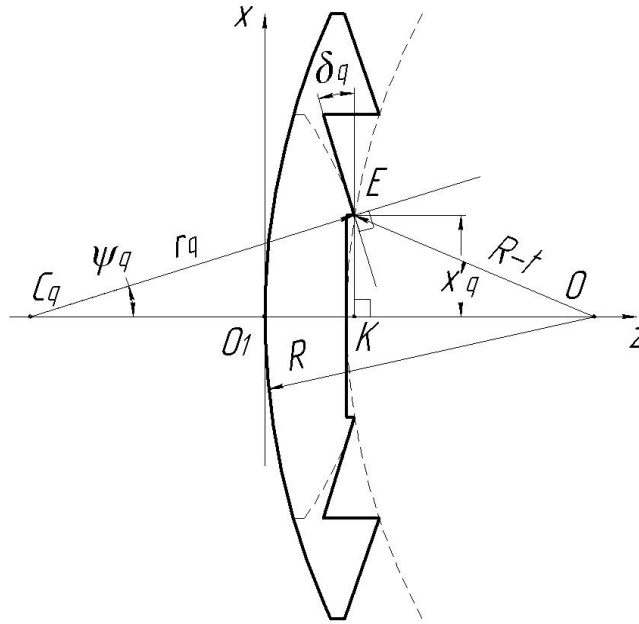


Рис. 5.18. До розрахунку радіусу дна канавки. Пунктирною лінією показана сферична поверхня канавки радіусом r_q , центр C_q якої лежить на оптичній вісі лінзи, а плоска поверхня, нахилена під кутом δ_q , являється дотичною до неї

Із трикутника СЕК маємо:

$$R_q = \frac{x'_q}{\sin \delta_q}. \quad (5.82)$$

Нехай вісь z співпадає з оптичною віссю лінзи, а початок координат лежить у вершині зовнішньої поверхні (точка O_1). Тоді положення центру сферичної поверхні канавки визначається відстанню $C_q O_1$. З рис. 5.18 можна записати:

$$C_q O_1 = C_q K - K O_1 = \sqrt{R_q^2 - x_q'^2} - R + \sqrt{(R - t)^2 - x_q'^2}.$$

З урахуванням вищезазначеної системи координат, рівняння внутрішньої поверхні сферичної лінзи Френеля матиме наступний вигляд:

$$z_q(x) = \sqrt{R_q^2 - x_q^2} - C_q O_1 = \sqrt{R_q^2 - x_q^2} - \sqrt{R_q^2 - x_q'^2} + R - \sqrt{(R - t)^2 - x_q'^2}. \quad (5.83)$$

Оскільки така сферична поверхня канавки разом із зовнішньою утворюють звичайну лінзу, то у фокусі будуть збігатися не тільки промені,

що пройшли через вершину канавки, а й всі промені, що заломились на цій поверхні.

Особливістю цього методу є також те, що за допомогою вищезазначених формул неможливо визначити радіус поверхні центральної (першої) зони, оскільки її вершина лежить на оптичній вісі лінзи. Одним із способів вирішення цієї проблеми є застосування формул геометричної оптики для визначення параметрів звичайної двояко випуклої лінзи [7].

Враховуючи, що товщина такої лінзи t , а радіус перший поверхні R , маємо:

$$\frac{1}{f'_1} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right) + t \frac{(n-1)^2}{nRr_1}; S'_{F'} = f'_1 \left(1 - \frac{n-1}{nR} t \right); S'_{F'} + t = f, \quad (5.84)$$

де f'_1 і $S'_{F'}$ – задня фокусна відстань і задній фокальний відрізок першої зони; f – фокусна відстань лінзи Френеля.

Із системи рівнянь (5.84) отримаємо рівняння для знаходження радіуса першої зони Френеля

$$\left[(n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right) + t \frac{(n-1)^2}{nRr_1} \right]^{-1} \left(1 - \frac{n-1}{nR} t \right) + t = f. \quad (5.85)$$

Метод проектування лінз Френеля зі сферичним профілем, розглянутий вище, було використано в статті [21] для розрахунку дифракційної лінзи з фокусною відстанню $f = 25$ мм, радіусом зовнішньої поверхні $R = 30$ мм, товщиною $t = 1$ мм і діаметром $D_p = 20$ мм. Кількість зон Френеля була обрана з конструктивних міркувань і становить 9. Як матеріал лінзи був обраний поліетилен з високою щільністю (HDPE - High-density polyethylene) [20], який добре пропускає випромінювання дальнього ІЧ діапазону 8...12 мкм і має показник заломлення $n = 1,54$. Результати розрахунків радіусів поверхонь зо Френеля наведені в табл. 5.1. На рис. 5.19 зображено профіль розрахованої ДЛ.

Таблиця 5.1

Радіуси поверхонь канавок розрахованої лінзи в мм

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9
42.941	43.031	43.302	43.758	44.404	45.25	46.307	47.595	49.137

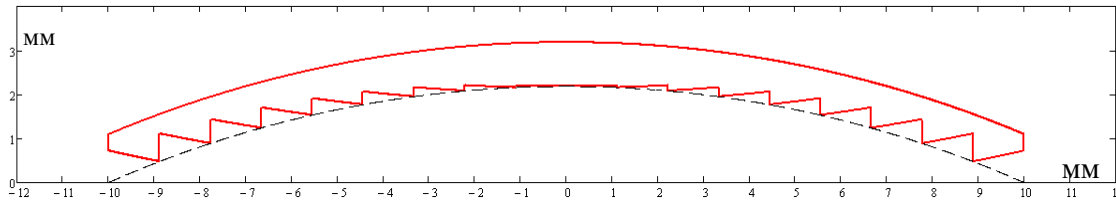


Рис. 5.19. Профіль сферичної лінзи Френеля, розрахованої за приведеними вище вихідними даними

Таким чином, розглянутий метод проектування лінз Френеля зі сферичним профілем дозволяє розрахувати профіль дифракційної лінзи, виготовленої на сферичній поверхні, який забезпечує задану фокусну відстань. Встановлено, що внутрішня поверхня такої лінзи складається із концентричних зон, сферичні поверхні, радіуси і положення центрів кривизни яких залежать від номеру зони. Вершини зон розміщені на уявній сферичній поверхні. Геометричні параметри внутрішньої поверхні лінзи описуються рівнянням (5.83). Для підвищення точності розрахунків можна використати початкові координати не вершини канавки, а центру дна канавок.

5.3.5. Проектування дифракційного дзеркала сферичної форми

Сучасні об'єктиви, які застосовуються в космічних оптико-електронних системах дистанційного зондування Землі, часто використовують поза осьові асферичні дзеркала великих розмірів [22]. Розрахунок, виготовлення і контроль таких дзеркал є складним, тривалим і затратним процесом. Однак такі дзеркала можна замінити сферичною дзеркальною поверхнею, на якій нанесено мікроструктуру у вигляді зон Френеля. Проектування таких дзеркал полягає у заміні асферичної поверхні

$$z(r) = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} + a_2r^4 + a_3r^6 + \dots \quad (5.86)$$

концентричними зонами Френеля з заданими геометричними параметрами. У формулі (5.86) $c = 1/R$ – кривизна дзеркальної сферичної поверхні; R –

радіус кривизни поверхні; k – конічна стала; a_2, a_3, \dots – асферичні коефіцієнти.

Визначимо параметри зон Френеля, використовуючи рис. 5.20. Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} t_q = R - \sqrt{R^2 - x_q^2}; \\ d_q = \sqrt{R^2 - x_q^2} - \sqrt{R^2 - (x_q + l_q)^2}; \\ \operatorname{tg} \varepsilon_q = \frac{h_q + d_q}{l_q}; \\ \operatorname{tg} 2\varepsilon_q = \frac{x_q + (l_q/2)}{f - t_q + [(h_q + d_q)/2]}, \end{cases} \quad (5.87)$$

де f – фокусна відстань дифракційного дзеркала. Визначення усіх параметрів в системі рівнянь (5.87) наведено на рис. 5.20.

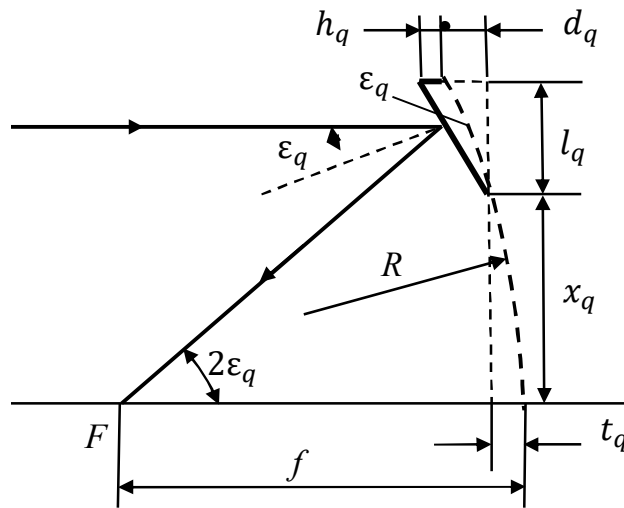


Рис. 5.20. Одна із зон Френеля дифракційного дзеркала сферичної форми

Розв'язком систем рівнянь (5.87) є квадратне рівняння

$$[x_q + (l_q/2)] \operatorname{tg}^2 \varepsilon_q + 2(f - t_q) \operatorname{tg} \varepsilon_q - [x_q + (l_q/2)] = 0. \quad (5.88)$$

Таким чином, геометричні параметри поверхні Френеля мають вигляд

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \varepsilon_q = \frac{-2(f - t_q) + \sqrt{4(f - t_q)^2 + 4x_q^2 - l_q^2}}{2x_q + l_q}; \\ h_q = l_q \operatorname{tg} \varepsilon_q - d_q \end{cases} \quad (5.89)$$

Параметри першої зони Френеля визначаються як $x_1 = 0$; $t_1 = 0$, а $x_{q+1} = x_q + l_q$. Якщо задано радіус R сферичної поверхні, то за допомогою

рівнянь (5.87) і (5.89) з різними l_q можна отримати структурні параметри дзеркальної поверхні Френеля. Також можна спроектувати поверхню Френеля з оптичною силою, що дорівнює оптичній силі асферичного дзеркала.

Набір параметрів R і l_q повинен забезпечити аберації дзеркальної поверхні Френеля близькими до аберацій заміненої асферичної поверхні (5.86). Функцію розсіювання точки асферичної поверхні можна отримати шляхом трасування променів, а ФРТ дзеркальної поверхні Френеля можна розрахувати за допомогою амплітудного коефіцієнта пропускання.

Використовуючи оптичну різницю ходу променів, відбитих зонною поверхнею Френеля, отримуємо різницю фаз між хвилями до і після дзеркальної поверхні Френеля:

$$\varphi_q(x) = 2k[h_q(x) + d_q(x) + t_q], \quad (5.90)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число. Тоді амплітудний коефіцієнт пропускання відбиваючої поверхні можна представити у вигляді

$$t(x) = \sum_{q=-N}^N \exp\{-j2k[h_q(x) + d_q(x) + t_q(x)]\}, \quad (5.91)$$

де N – число зон Френеля, які розташовані на поверхні сферичного дзеркала.

Із рис. 5.20 і рівнянь (5.87) і (5.89) маємо

$$h_q(x) + d_q(x) = \begin{cases} (x - x_q) \operatorname{tg} \varepsilon_q, & \text{коли } x_q < x \leq x_q + l_q, \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (5.92)$$

де $x_q = \sum_{i=0}^{q-1} l_i$.

Представимо рівняння (5.91) у вигляді

$$t(x) = \sum_{q=-N}^N \left\{ \operatorname{rect} \left[\frac{1}{l_q} (x - \sum_{i=0}^{q-1} l_i) \right] \exp[j2kl_q(x - \sum_{i=0}^{q-1} l_i) \operatorname{tg} \varepsilon_q] \exp[-2kt_q(x)] \right\}, \quad (5.93)$$

Розподіл амплітуди поля у фокальній площині $x_f y_f$ можна отримати згідно рівняння дифракції Фраунгофера (2.65) як перетворення Фур'є функції амплітудного коефіцієнта пропускання $V(x_f, y_f) \simeq F\{t(x, y)\}$. Для одновимірної функції (5.93) маємо

$$V(x_f) \simeq \sum_{q=-N}^N F \left\{ \operatorname{rect} \left[\frac{1}{l_q} (x - \sum_{i=0}^{q-1} l_i) \right] \right\} \times.$$

$$\times \exp[j2kl_q(x - \sum_{i=0}^{q-1} l_i) \operatorname{tg} \varepsilon_q] \exp[-2kt_q(x)] \}. \quad (5.94)$$

Розподіл амплітуди поля у площині, зміщеній на z_0 по відношенню до фокальної площини, можна отримати із рівняння дифракції Френеля (2.56)

$$V(z) = \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkz) F \left\{ t(x) \exp \left(jk \frac{x^2}{2z} \right) \right\}, \quad (5.95)$$

де $z = f + z_0$.

Розподіл інтенсивності в ФРТ можна отримати із рівняння (5.95) при заданих параметрах R і l_q . Корекцією цих параметрів можна створити сферичне дзеркало з оптичною силою рівною оптичній силі асферичного дзеркала.

5.4. Розрахунок дифракційних оптичних елементів у наближенні теорії дифракції

5.4.1. Загальні положення

Під час проектування дифракційних оптичних елементів виникає потреба у розв'язанні прямої та оберненої задач теорії дифракції світла.

Пряма задача дифракції світла формулюється так: потрібно знайти функцію $V(x, y, z)$, яка задовольняє в середині об'єму v , що обмежується поверхнею S , і на поверхні S рівняння $L\{V(x, y, z)\} = 0$ у часткових похідних, де $L\{ \}$ – оператор, який визначається диференціальним рівнянням Гельмгольца.

Обернена задача дифракції світла стосовно методів визначення фазової функції $\varphi_{doe}(x, y)$ ДОЕ формулюється так: потрібно знайти профіль зон мікрорельєфу поверхні елемента $h_{doe}(x, y)$, який задовольняє умову отримання заданого розподілу інтенсивності $I_0(x_0, y_0, z)$ у певній зоні спостереження (рис. 5.21).

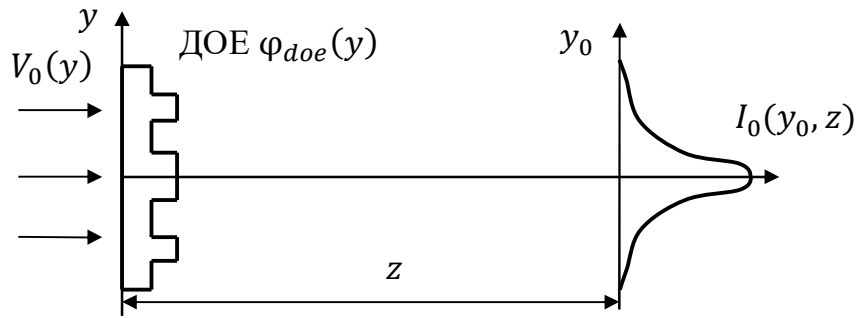


Рис. 5.21. Одновимірна схема формування ДОЕ заданого розподілу інтенсивності $I_0(y_0)$

5.4.2. Ітеративні методи розрахунку ДОЕ

Застосування ітеративних методів для розв'язання задач розрахунку ДОЕ вимагає спеціального дослідження [17]. Це пов'язано з тим, що, зазвичай, задачі поновлення спотворених зображень зводяться до розв'язку лінійного інтегрального рівняння згортки. Водночас задачі синтезу ДОЕ зводяться до розв'язку нелінійного інтегрального рівняння, нелінійність якого пов'язана з комплексною амплітудою когерентного світла (наявністю фази).

Розглянемо алгоритм розв'язку нелінійного інтегрального рівняння дифракції Френеля (2.56) з метою розрахунку фазових оптичних елементів, які формують заданий розподіл інтенсивності когерентного монохроматичного світла в деякій площині, перпендикулярній оптичній осі. Алгоритм розв'язання цього інтегрального рівняння є адаптивним, оскільки нова оцінка потрібної функції на кожній стадії ітерації вибирається не лише у відповідності до необхідної функції інтенсивності, але й залежно від попередньої оцінки.

У межах параксильної скалярної теорії дифракції комплексна амплітуда світла у площині оптичного елемента

$$V(x, y) = U(x, y) \exp[j\phi(x, y)] \quad (5.96)$$

пов'язана з комплексною амплітудою

$$V(x_0, y_0) = U(x_0, y_0) \exp[j\phi(x_0, y_0)] \quad (5.97)$$

у площині спостереження, де формується необхідний розподіл інтенсивності,

інтегралом згортки (2.56):

$$V(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) h_F(x - x_0, y - y_0) dx dy, \quad (5.98)$$

де

$$h_F(x - x_0, y - y_0) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]\right\} \quad (5.99)$$

називають *імпульсним відгуком вільного простору в наближенні Френеля* (рис. 5.22).

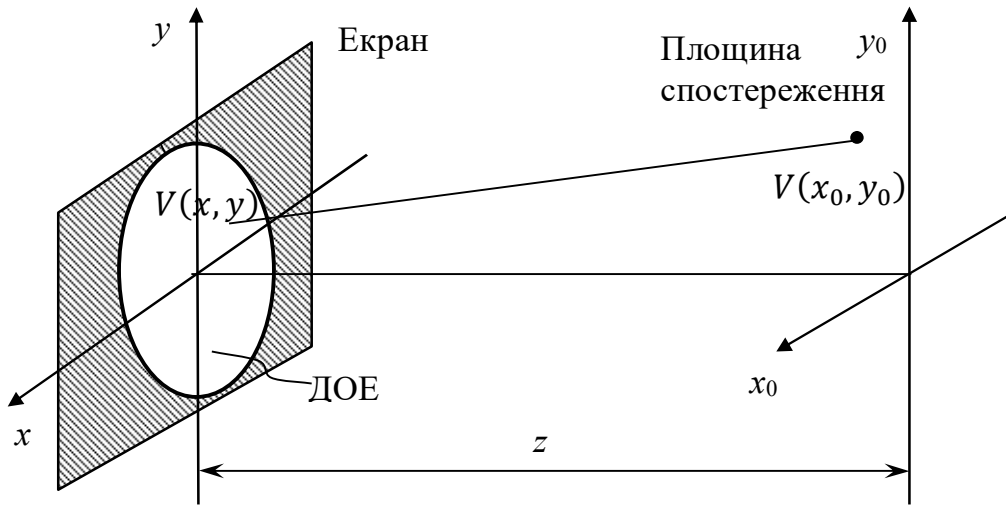


Рис. 5.22. Схема формування параксiального зображення за допомогою ДОЕ

У рівнянні (5.98) комплексна амплітуда (5.96) у наближенні тонкого оптичного елемента, коли не враховується заломлення променів, дорівнює добутку комплексної амплітуди поля $V_0(x, y)$, що падає на ДОЕ, на амплітудний коефіцієнт пропускання ДОЕ $t_{doe}(x, y)$, тобто

$$V(x, y) = V_0(x, y) t_{doe}(x, y). \quad (5.100)$$

Для фазового ДОЕ коефіцієнт пропускання описується комплексною функцією

$$t_{doe}(x, y) = \exp[j\phi_{doe}(x, y)], \quad (5.101)$$

де $\phi_{doe}(x, y)$ – фазова функція ДОЕ, яку необхідно розрахувати.

Задачу розрахунку фазової функції ДОЕ $\phi_{doe}(x, y)$ можна звести з урахуванням амплітуди (5.97) до розв’язання нелінійного інтегрального рівняння

$$I_0(x_0, y_0) = |V(x_0, y_0)|^2 = U^2(x_0, y_0) = \left| \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) e^{j\varphi(x, y)} h_F(x - x_0, y - y_0) dx dy \right|^2, \quad (5.102)$$

де $I_0(x_0, y_0)$ – задана інтенсивність у площині спостереження; $U_0(x, y)$ – дійсна амплітуда поля на вході ДОЕ; $\varphi(x, y) = \varphi_{doe}(x, y) + \varphi_0(x, y)$; $\varphi_0(x, y)$ – фаза хвилі світла на вході ДОЕ.

Ітераційний метод розрахунку фазової функції $\varphi(x, y)$, а разом з нею і фазової функції ДОЕ $\varphi_{doe}(x, y)$, полягає у розв’язанні рівняння (5.102) методом послідовних наближень, як це розглянуто в монографії [17]. Алгоритм Герчберга–Секстона зменшення похибки складається з таких кроків:

1. Обирається початкова фазова функція ДОЕ $\varphi_1(x, y)$ у першому наближенні.

2. Здійснюється інтегральне перетворення рівняння Френеля (5.98) для функції $V_1(x, y) = U_1(x, y) \exp[j\varphi_1(x, y)]$.

3. Результируюча комплексна амплітуда $V_1(x_0, y_0)$ у площині спостереження замінюється на функцію $\bar{V}_1(x_0, y_0)$ за правилом

$$\bar{V}_1(x_0, y_0) = U_0(x_0, y_0) \frac{V_1(x_0, y_0)}{|V_1(x_0, y_0)|}, \quad (5.103)$$

де $U_0(x_0, y_0)$ – задана дійсна амплітуда поля в площині спостереження, $U_0(x_0, y_0) = \sqrt{I_0(x_0, y_0)}$.

4. Розраховується перетворення, обернене перетворенню (5.98), відносно функції (5.103):

$$V'_1(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{V}_1(x_0, y_0) h_F^*(x_0 - x, y_0 - y) dx_0 dy_0. \quad (5.104)$$

5. Отримана комплексна амплітуда поля $V'_1(x, y)$ (5.104) у площині ДОЕ замінюється на $V_2(x, y)$ за правилом

$$V_2(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) \frac{V'_1(x, y)}{|V'_1(x, y)|}, & \text{коли } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{D_p}{2}; \\ 0, & \text{коли } \sqrt{x^2 + y^2} > \frac{D_p}{2}, \end{cases} \quad (5.105)$$

де D_p – діаметр апертури ДОЕ.

6. Перехід до кроку 2.

Ця процедура повторюється доти, поки похибки δ_1 і δ_2 не будуть значно змінюватись:

$$\delta_1^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} [|V_i(x_0, y_0)| - U_0(x_0, y_0)]^2 dx_0 dy_0}{2 \iint_{-\infty}^{\infty} U_0^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0}, \quad (5.106)$$

$$\delta_2^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} [|V_i(x, y)| - U_0(x, y)]^2 dx dy}{2 \iint_{-\infty}^{\infty} U_0^2(x, y) dx dy}. \quad (5.107)$$

Розглянуту процедуру (5.103)–(5.107) називають *алгоритмом зменшення похибки* тому, що зі збільшенням ітерацій похибка не зростає. Крім того, цей алгоритм дозволяє мінімізувати функціонал середньоквадратичного відхилення амплітуди поля $|V(x_0, y_0)|$ у площині спостереження від заданого значення $U_0(x_0, y_0)$:

$$\varepsilon_0 = \iint_{-\infty}^{\infty} [|V(x_0, y_0)| - U_0(x_0, y_0)]^2 dx_0 dy_0. \quad (5.108)$$

Зазначимо, що процес збіжності алгоритму характеризується ефектом стагнації: у процесі перших наближень похибки δ_1 і δ_2 швидко зменшуються, а наступні ітерації не призводять до їх помітного зменшення.

Крім розглянутого алгоритму розв'язання інтегрального рівняння (5.102) є й інші: алгоритм входу-виходу, адаптивно-адитивний алгоритм і адаптивно-регуляризаційний алгоритм, які розглянуті в монографії [17].

5.4.3. Проектування ДОЕ методом послідовної ітерації – збіжності

Традиційні сферичні лінзи не можуть забезпечити значної фокусної глибини, тобто перетворити широкий паралельний пучок світла в тонку лінію вздовж оптичної осі. Цю функцію можуть виконати аксикони, однак вони мають великі енергетичні втрати порівняно з ДОЕ, в яких відбувається тільки фазова модуляція вхідного пучка.

У статті [23] запропоновано дифракційний метод проектування ДОЕ, який називають *методом послідовної ітерації – збіжності* (МПІЗ, або ASIM – Adjacent Sequence Iteration Method).

Розглянемо суть цього методу для одновимірного випадку. Нехай на ДОЕ нормально падає когерентний пучок світла з довжиною хвилі λ , який має

розподіл інтенсивності $I_0(x) = |V_0(x)|^2$ і постійну фазу. Дифракційний оптичний елемент модулює цей пучок фазою $\varphi_{doe}(x)$ і формує поле за елементом з розподілом амплітуди $V(x) = V_0(x)\exp[j\varphi_{doe}(x)]$. Це поле поширюється у вільному просторі за ДОЕ і формує дифракційну картину у вихідній площині x_0 . На рис. 5.23 схематично зображено оптичну систему з рядом вихідних площин x_{0i} , в яких розподіл амплітуди поля виражається формулою дифракції Френеля (2.56)

$$V(x_{0i}) = \frac{1}{j\lambda z_i} \int_{-\infty}^{\infty} V_0(x) \exp[j\varphi_{doe}(x)] \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z_i}(x_{0i} - x)^2\right] dx, \quad (5.109)$$

де $i = 1, 2, \dots, n$ – номер вихідної площини. У формулі (5.109) фаза $\varphi_{doe}(x)$ ДОЕ має забезпечити задану інтенсивність $I_{0i}(x_{0i})$.

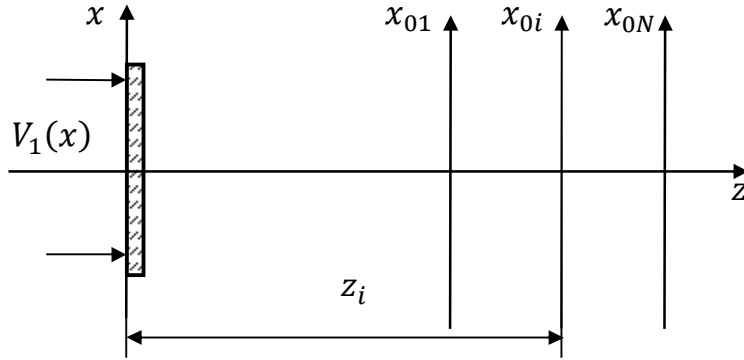


Рис. 5.23. Схема проектування ДОЕ за допомогою МПІЗ

Визначимо функції

$$G(x_{0i}) = V(x_{0i}) \exp\left(-j\frac{\pi}{\lambda z_i} x_{0i}^2\right); \quad (5.110)$$

$$g(x) = \frac{1}{j\lambda z_i} V_0(x) \exp\left\{j\left[\varphi_{doe}(x) + \frac{\pi x^2}{\lambda z_i}\right]\right\}. \quad (5.111)$$

Тоді вираз (5.109) з урахуванням (5.110) і (5.111) матиме вигляд

$$G(x_{0i}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\left(-j2\pi \frac{x_{0i}x}{\lambda z_i}\right) dx. \quad (5.112)$$

З переходом з i -ї вихідної площини до вхідної площини маємо обернене перетворення від інтеграла (5.112), тобто

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_{0i}) \exp\left(j2\pi \frac{xx_{0i}}{\lambda z_i}\right) dx_{0i}. \quad (5.113)$$

Оскільки відомі розподіл інтенсивності $I_0(x)$ на вході ДОЕ і необхідний розподіл інтенсивності на вихідних площинах $I_{0i}(x_{0i})$, то фазу ДОЕ $\varphi_{doe}(x)$

можна визначити за допомогою ітераційного алгоритму.

Розглянемо тепер алгоритм МПЗ, за допомогою якого можна точно спроектувати ДОО з необхідною функцією пропускання $\exp[j\varphi_{doe}(x)]$. Як відомо, розподіл поля у площині x_{0i} є результатом світлового поля у площині $x_{0,i-1}$, які пов'язані між собою рівнянням дифракції Френеля. В алгоритмі МПЗ враховується це явище і тому при ітерації використовується розподіл інтенсивності на x_{0i} площині для того, щоб впливати на розподіл інтенсивності на наступній площині. Процедура ітерації полягає в такому.

Першим етапом ітерації є встановлення зв'язків між вхідною площиною x і першою вихідною площиною x_{01} . Значення функції $G_1(x_{01})$ на першій вихідній площині отримаємо з виразів (5.111) і (5.112) підставляючи вихідну (початкову) фазу ДОО $\varphi_{doe,0}(x)$ у вираз (5.111). Вхідне значення $g_1(x_1)$ отримаємо із перетворення (5.113) підстановкою фази із $G_1(x_{01})$, використовуючи обмеження $|V(x_{01})| = |G_1(x_{01})|$. Для вхідної і другої вихідної площин вихідне значення $G_1(x_{02})$ на другій площині отримаємо з виразу (5.112) підстановкою фази із $g_1(x)$ й обмеженням $|g(x)| = |V(x)|$. Вхідне значення $g_1(x_2)$ отримаємо з виразу (5.113) підстановкою фази $G_1(x_{02})$ й обмеженням $|G_1(x_{02})| = |V(x_{02})|$. Для вхідної та i -ї вихідної площин функції $g_1(x_i)$ і $G_1(x_{0i})$ визначаються так само. Така процедура розрахунків триває до останньої вихідної площини x_{0n} . Після завершення першої стадії ітерації отримуємо n вхідних величин $g_1(x_1)$, $g_1(x_2)$, ..., $g_1(x_n)$ і n вихідних величин $G_1(x_{01})$, $G_1(x_{02})$, ..., $G_1(x_{0n})$. Також можна бачити, що вихідна величина $G_1(x_{0i})$ на i -й вихідній площині отримана із $g_1(x_{i-1})$, яка визначається функцією $G_1(x_{0,i-1})$, так що вихідна величина $G_1(x_{0i})$ на i -й вихідній площині визначається вихідною функцією $G_1(x_{0,i-1})$ на $i-1$ -й вихідній площині.

Друга стадія ітерації починається з обчислення середньої фази всіх вхідних величин $g_1(x_1)$, $g_1(x_2)$, ..., $g_1(x_n)$, яку вважають вихідною (початковою) фазою перетворення із вхідної площини до першої вихідної площини. Таким способом ітерація відбувається до i -го періоду так, що n

вихідних величин $G_i(x_{01}), G_i(x_{02}), \dots, G_i(x_{0n})$ отримаємо після i -го періоду ітерацій. Цей процес продовжується m стадій доти, поки m -ті вихідні величини $|G_m(x_{0i})|^2$, де $i = 1, 2, \dots, n$ будуть відповідати заданій умові на відстані між 1-ю і n -ю вихідними площинами. Похибка визначається наближеністю необхідних вихідних величин до отриманих вихідних величин, які повинні задовольняти умову, коли дисперсія

$$D_m^2 = \sum_{i=1}^n [|V(x_{0i})| - |G_1(x_{0i})|]^2 \leq \varepsilon, \quad (5.114)$$

де ε – наперед задане мале число. Протягом ітерації забезпечується виконання умови $|G_1(x_{0i})|^2 = |V(x_{0i})|^2$. Зазначимо, що іноді розраховані величини не задовольняють заданий розподіл інтенсивності, тоді ітерація припиняється, а розраховані величини забезпечують ряд відносно постійних величин.

Розглянемо приклад застосування описаної методики до проектування дифракційного оптичного елемента, який фокусує лазерний пучок у відрізок певної довжини, розміщений уздовж оптичної осі. Для вісесиметричної оптичної системи вирази (5.110)–(5.112) для дифракції Френеля за поширення світла у вільному просторі визначимо таким чином:

$$G(r_{0i}) = V(r_{0i}) \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda z_i} r_{0i}^2\right); \quad (5.115)$$

$$g(r) = \frac{1}{j\lambda z_i} V_0(r) \exp[j\phi_{doe}(r)]; \quad (5.116)$$

$$G(r_{0i}) = 2\pi \int_0^\infty g(r) J_0\left(\frac{2\pi r_{0i} r}{\lambda z_i}\right) r dr, \quad (5.117)$$

де r і r_{0i} – радіальні координати у вхідній та i -й вихідній площинах відповідно; z_i – відстань від вхідної площини до i -ї вихідної площини; J_0 – функція Бесселя нульового порядку.

Нехай вхідна площина освітлюється гаусовим лазерним пучком, який нормально падає на площину і створює розподіл амплітуди поля,

$$V_0(r) = \frac{2\sqrt{\pi}}{r_l} \exp\left(-\frac{r^2}{r_l^2}\right), \quad (5.118)$$

де r_l – радіус лазерного пучка.

За таких умов у i -й вихідній площині формується амплітуда поля

$$G(r_{0i}) = \frac{2\pi}{j\lambda z_i} \int_0^R V_0(r) \exp[j\varphi_{doe}(r)] J_0\left(\frac{2\pi r_{0i}r}{\lambda z_i}\right) r dr, \quad (5.119)$$

а обернене перетворення від i -ї вихідної площини до вхідної площини можна подати у вигляді

$$V(r) = 2\pi \int_0^{R_{0i}} V(r_{0i}) \exp[j\varphi(r_{0i})] J_0\left(\frac{2\pi r r_{0i}}{\lambda z_i}\right) r_{0i} dr_{0i}, \quad (5.120)$$

де R і R_{0i} – радіуси області інтегрування у вхідній та i -й вихідній площинах відповідно; $\varphi(r_{0i})$ – фаза поля в i -й вихідній площині, отримана в результаті попереднього ітераційного обчислення; $V(r_{0i})$ – необхідна амплітуда поля в i -й вихідній площині. Фаза поля $\varphi(r)$ у вхідній площині спочатку ітерації обирається (наприклад, $\varphi(r) = 0$), а на останній стадії визначає фазу $\varphi_{doe}(r)$ спроектованого ДОЕ.

У статті [23] наведено приклад застосування розглянутого методу для проектування ДОЕ, призначеного для фокусування паралельного лазерного пучка у відрізок уздовж оптичної осі, який діє подібно лінзі з великою фокусною глибиною. Дифракційна лінза повинна мати такі вихідні параметри:

- фокусну відстань $f' = 80$ мм;
- діаметр $D_p = 4$ мм;
- фокусну глибину $\Delta f \geq \pm 1$ мм;
- область фокусування $\Delta z_f = 2$ мм;
- у межах фокусної глибини потік світлової енергії має перевищувати на 80 % усю енергію лазерного пучка.

Щоб задовольнити наведені вимоги у статті [23] запропоновано розглядати п'ять вихідних площин, розташованих на відстані 1 мм одна від одної. Необхідний розподіл поля у цих площинах описується функцією Гауса, інтенсивність його зменшується до 5 % на кільці радіусом $r_0 = 25$ мкм і дорівнює нулю за межами цього кільця. Під час ітерації було встановлено обмеження $V_0(r) = |V(r)|$ для вхідної площини і $V_0(r_{0i}) = |V(r_{0i})|$ для i -ї вихідної площини ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Ітерація проводилася за алгоритмом МПІЗ

за ітераційними формулами (5.119) і (1.120), де за початкову фазу було обрано фазу сферичної лінзи з фокусною відстанню 80 мм. Ітерація закінчувалась значенням фази $\varphi_{doe}(r)$, яка забезпечила наближення $V_0(r_{0i}) \cong |V(r_{0i})|$ для усіх п'яти площин.

Розподіл інтенсивності у площині $z_i = 80,4$ мм та уздовж оптичної осі в області фокусування Δz_f зображено на рис. 5.24. Із графіків видно, що відносний розподіл інтенсивності істотно зменшується вздовж радіальної координати і на радіусі 25 мкм інтенсивність спадає до 5–8 % від максимального значення. В області фокусування діаметром 50 мкм на відстані 78,4; 79,4 і 80,4 мм від ДОО зосереджено відповідно 85, 93 і 85 % світлової енергії, яка пройшла крізь елемент.

Отже, розглянутий алгоритм МПЗ дозволяє проектувати ДОО для керування хвильовим фронтом, який проходить крізь елемент. Головна властивість алгоритму МПЗ полягає в тому, що під час поширення світла амплітуда поля в попередній площині впливає на амплітуду поля в наступній площині.

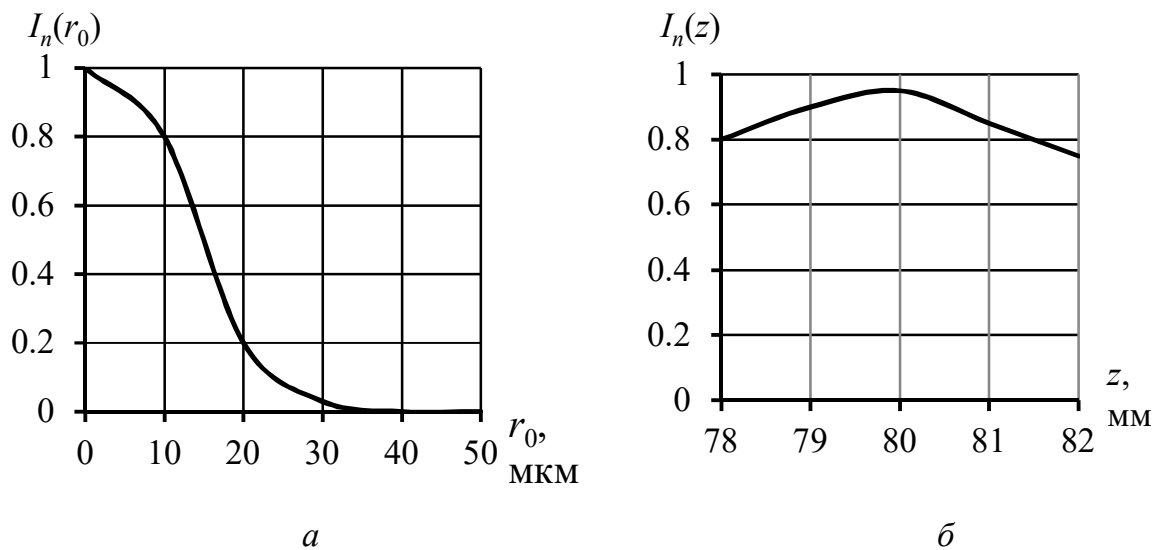


Рис. 5.24. Результати розрахунків під час проектування ДОО з великою фокусною глибиною: а – залежність нормованої інтенсивності від радіуса до оптичної осі у площині, розміщеній на відстані 80,4 мм від ДОО; б – зміна нормованої інтенсивності у межах області фокусування

5.4.4. Проектування ДОЕ, які формують радіально-симетричний розподіл освітленості

Дифракційні оптичні елементи, що формують кільцевий розподіл інтенсивності. Задача проектування радіально-симетричних дифракційних оптичних елементів, які формують поздовжні світлові відрізки, і розрахунок багатофокусних лінз зводяться до одновимірних задач фокусування світла в поперечний відрізок і розрахунку багатопорядкової дифракційної ґратки.

Щоб розрахувати ДОЕ, які формують у деякій області простору розподіл інтенсивності з круговою симетрією, корисно використати полярну систему координат у площині дифракційного елемента (r, φ) і в площині спостереження (r_0, φ_0) :

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi; x_0 = r_0 \cos \varphi_0; y_0 = r_0 \sin \varphi_0. \quad (5.121)$$

У цьому випадку інтегральне рівняння дифракції Френеля (5.98) у полярних координатах (5.121) матиме вигляд

$$V(r_0, \varphi_0) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} V(r, \varphi) \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \right\} r dr d\varphi. \quad (5.122)$$

Для того, щоб модуль комплексної функції $V(r_0, \varphi_0)$ у площині спостереження не залежав від азимутального кута φ_0 , обмежимо розгляд набором функцій

$$V(r, \varphi) = V(r) e^{jm\varphi}, \quad (5.123)$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$.

Для функції (1.123) рівняння (1.122) матиме вигляд

$$V(r_0, \varphi_0) = (-j)^{m+1} \frac{2\pi}{\lambda z} e^{jkz} e^{jm\varphi_0} \times \int_0^\infty V(r) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (r^2 + r_0^2) \right] J_m \left(\frac{2\pi r_0 r}{\lambda z} \right) r dr, \quad (5.124)$$

де J_m – функція Бесселя першого роду m -го порядку,

$$J_m(x) = \frac{(-j)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[j(mt + x \cos t)] dt. \quad (5.125)$$

Із рівняння (1.124) маємо, що для знаходження фазової функції ДОЕ $\varphi_{doe}(r)$ у межах скалярної теорії дифракції Френеля необхідно розв'язати

таке інтегральне рівняння:

$$I_0(r_0) = |V(r_0)|^2 = \left| \frac{2\pi}{\lambda z} \int_0^{R_{doe}} V_0(r) \exp[j\varphi_{doe}(r)] \exp\left(j \frac{\pi r^2}{\lambda z}\right) J_m\left(\frac{2\pi r_0 r}{\lambda z}\right) r dr \right|^2, \quad (5.126)$$

де $I_0(r_0)$ – вісесиметричний розподіл інтенсивності, який необхідно сформувати на відстані z від площини ДОЕ; $|V_0(r)|$ – вісесиметричний розподіл амплітуди поля, яке освітлює ДОЕ; $\varphi_{doe}(r)$ – фазова функція ДОЕ, яку потрібно знайти; R_{doe} – радіус ДОЕ.

Із рівняння (5.126) видно, що для ітеративного пошуку фазової функції ДОЕ потрібно обчислити пряме й обернене перетворення Ханкеля [5]:

$$H(r_0) = \frac{2\pi}{\lambda z} \int_0^\infty h(r) J_m\left(\frac{2\pi r_0 r}{\lambda z}\right) r dr; \quad (5.127)$$

$$h(r) = \frac{2\pi}{\lambda z} \int_0^\infty H(r_0) J_m\left(\frac{2\pi r_0 r}{\lambda z}\right) r_0 dr_0, \quad (5.128)$$

де $h(r) = V_0(r) \exp\left\{j \left[\varphi_{doe}(r) + \frac{\pi r^2}{\lambda z}\right]\right\}$.

Розглянемо ітеративний метод розв'язання інтегрального рівняння (5.126), в якому треба знайти

$$\varphi(r) = \varphi_{doe}(r) + \frac{\pi r^2}{\lambda z}. \quad (5.129)$$

Процедура ітеративного розв'язку рівняння (5.126) аналогічна алгоритму Герцберга–Секстона, що наведений в п. 5.4.3, з використанням прямого (5.127) й оберненого (5.128) перетворень Ханкеля. При цьому виконується обмеження, коли функція $V_i(r)$, розрахована у площині ДОЕ, замінюється на функцію $\bar{V}_i(r)$ згідно з правилом (5.105):

$$\bar{V}_i(r) = V_{i+1}(r) = \begin{cases} U_0(r) \frac{V_i(r)}{|V_i(r)|}, & \text{коли } 0 \leq r \leq R_{doe}; \\ 0, & \text{коли } r > R_{doe}. \end{cases} \quad (5.130)$$

Водночас розрахована амплітуда $V_i(r_0)$ у площині спостереження замінюється на

$$\bar{V}_i(r_0) = \sqrt{I_0(r_0)} \frac{V_i(r_0)}{|V_i(r_0)|}. \quad (5.131)$$

Заміна (5.131) аналогічна заміні (5.130).

Дифракційні оптичні елементи, що формують осьовий розподіл інтенсивності. Розглянемо методику застосування інтегрального рівняння (5.126) для проектування ДОЕ, які формують світлові пучки заданого розподілу інтенсивності вздовж оптичної осі. Розрахуємо радіальну фазову функцію оптичного елемента $\varphi_{doe}(r)$, який формує осьовий відрізок, обмежений точками z_1 та z_2 , із заданим розподілом інтенсивності $I_0(z)$ уздовж відрізка z_1z_2 . Нехай ДОЕ освітлюється плоскою світловою хвилею одиничної амплітуди, яка нормально падає на елемент, тоді рівняння (5.124) матиме вигляд

$$V(r_0, z) = -j \frac{2\pi}{\lambda z} e^{jkz} \exp\left(j \frac{\pi r_0^2}{\lambda z}\right) \times \\ \times \int_0^{R_{doe}} \exp\left\{j \left[\varphi_{doe}(r) + \frac{\pi r^2}{\lambda z}\right]\right\} J_0\left(\frac{2\pi r_0 r}{\lambda z}\right) r dr \quad (5.132)$$

де R_{doe} – радіус ДОЕ; $\varphi_{doe}(r)$ – шукана фазова функція; $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Заданий розподіл інтенсивності $I_0(z)$ уздовж оптичної осі ДОЕ (осі z) можна отримати, якщо розглядати рівняння (5.132) за $r_0 = 0$. Якщо не враховувати постійного фазового множника $-je^{jkz}$, рівняння (5.132) матиме вигляд

$$V(0, z) = \frac{2\pi}{\lambda z} \int_0^{R_{doe}} \exp\left\{j \left[\varphi_{doe}(r) + \frac{\pi r^2}{\lambda z}\right]\right\} r dr. \quad (5.133)$$

Замінімо змінні у рівнянні (5.133):

$$\xi = \frac{2\pi}{\lambda z}; \quad \eta = \frac{r^2}{2}. \quad (5.134)$$

Тоді з урахуванням заміни (5.134) рівняння (5.133) матиме вигляд

$$\frac{1}{\xi} V(\xi) = \int_0^a \exp\{j[\varphi_{doe}(\eta) + \xi\eta]\} d\eta, \quad (5.135)$$

де $a = R_{doe}^2/2$.

Із рівняння (5.135) видно, що шукана функція пропускання ДОЕ – аксикона $t_{doe}(r) = \exp[j\varphi_{doe}(r)]$ визначається вісесиметричною комплексною амплітудою $V(\xi)$ через одновимірне перетворення Фур'є, тому проблема проектування ДОЕ зводиться до розв'язання одновимірного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\xi^2} I_0(\xi) = \left| \int_0^a \exp\{j[\varphi_{doe}(\eta) + \xi\eta]\} d\eta \right|^2. \quad (5.136)$$

Рівняння (5.136) можна розв'язати за допомогою алгоритму зменшення похибок (5.103)–(5.107), при цьому ступінь наближення розрахованої функції $I_n(\xi) = |V_n(\xi)|^2$ до заданої функції $I_0(\xi)$ визначається із середньоквадратичного відхилення

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} |I_n(\xi) - I_0(\xi)|^2 d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} I_0^2(\xi) d\xi}}, \quad (5.137)$$

де $\xi_1 = \frac{2\pi}{\lambda z_1}$; $\xi_2 = \frac{2\pi}{\lambda z_2}$.

Енергетичну ефективність формування осевого світлового відрізка знаходять з виразу

$$\eta_{eff}(z_k) = \frac{\int_0^{R_{01}} I(r_0, z_k) r_0 dr_0}{\int_0^\infty I(r_0, z_k) r_0 dr_0}, \quad (5.138)$$

де $I(r_0, z_k)$ – розрахована інтенсивність у площині, яка перебуває на відстані z_k від ДОЕ; R_{01} – радіус першого локального мінімуму інтенсивності $I(r_0, z_k)$. Функція $\eta_{eff}(z_k)$ визначає частку світлової енергії, яка бере участь у формуванні дифракційної плями у заданій площині спостереження.

Якщо задана інтенсивність $I_0(z)$ має вигляд

$$I_0(z) = I_0 \sum_{i=1}^N \delta(z - z_i), \quad (5.139)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, то розв'язком рівняння (5.105) буде фаза $\varphi_{doe}(r)$, яка утворює дифракційну лінзу з N фокусами рівної інтенсивності I_0 .

Дифракційні оптичні елементи з кінцевою кількістю кілець на апертурі. Розглянемо ітеративний алгоритм, який дозволяє здійснити розрахунок вісесиметричних ДОЕ з невеликою кількістю кілець на апертурі й, відповідно, з певним числом рівнів фази. Подібний алгоритм наведено у монографії [17].

Розглянемо оптичну систему ДОЕ – лінза, яка формує заданий розподіл інтенсивності $I_0(r_0)$ у фокальній площині лінзи. У цьому випадку рівняння

(5.126) для розрахунку фази $\varphi_{doe}(r)$ можна записати у вигляді

$$I_0(r_0) = \left| \frac{2\pi}{\lambda z} \int_0^{R_{doe}} U_0(r) \exp[j\varphi(r)] J_0\left(\frac{2\pi r_0 r}{\lambda f}\right) r dr \right|^2, \quad (5.140)$$

де $U_0(r)$ – амплітуда когерентної хвилі на вході оптичної системи, $U_0(r) = 1$; f – фокусна відстань лінзи.

Фазову функцію $\varphi(r)$ розглядатимемо в кусково-постійному вигляді (рис. 5.25). Тоді комплексну амплітуду поля $V(r_0)$ у фокальній площині лінзи можна подати як суму амплітуд, отриманих у результаті дифракції плоскої хвилі на кільцевій апертурі:

$$V(r_0) = \sum_{i=1}^N V_i(r_0) = \sum_{i=1}^N \exp(j\varphi_i) \times \left[r_i \frac{J_1\left(\frac{2\pi r_i r_0}{\lambda f}\right)}{r_0} - r_{i-1} \frac{J_1\left(\frac{2\pi r_{i-1} r_0}{\lambda f}\right)}{r_0} \right], \quad (5.141)$$

де φ_i – значення функції $\varphi(r)$, коли $r \in [r_{i-1}, r_i]$; $i = 1, 2, \dots, N$; $r_0 = 0$; $r_N = R_{doe}$.

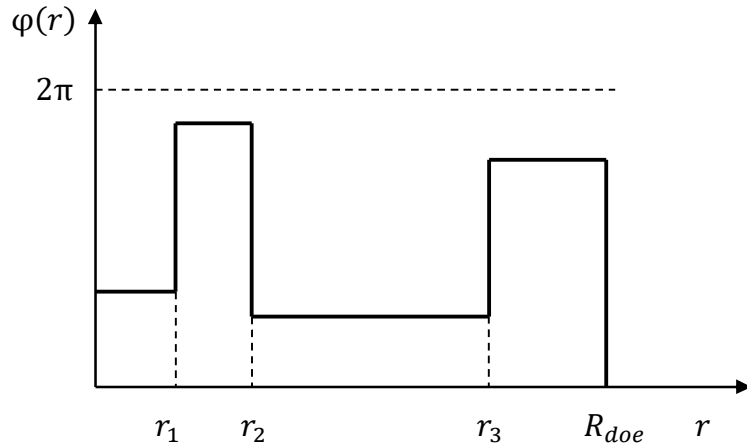


Рис. 5.25. Кусково-постійна фазова функція ДОЕ з певною кількістю кілець на апертурі

Після відповідного перетворення, яке наведено в монографії [17], рівняння (5.141) матиме вигляд

$$V(r_0) = \frac{1}{r_0} \sum_{i=1}^N C_i J_1\left(\frac{\gamma_i r_0}{a}\right), \quad (5.142)$$

де

$$C_i = r_i [\exp(j\varphi_{i-1}) - \exp(j\varphi_i)]; \quad C_N = R_{doe} \exp(j\varphi_N), \quad (5.143)$$

де γ_i – нулі функцій Бесселя першого порядку, $J_1(\gamma_i) = 0$. Із рівнянь (5.142) і

(5.143) маємо, що радіуси кілець ДОЕ мають задовольняти умову

$$r_i = \frac{\gamma_i \lambda f}{2\pi \mu_d}; \mu_d \geq R_{doe}, \quad (5.144)$$

де μ_d – константа, яка контролює (визначає) масштаб поділу ДОЕ на кільця.

Введемо позначення $V'(r_0) = r_0 V(r_0)$. Тоді рівняння (5.142) матиме вигляд

$$V'(r_0) = \sum_{i=1}^N C_i J_1\left(\frac{\gamma_i r_0}{a}\right). \quad (5.145)$$

Для знаходження коефіцієнтів C_i у рівнянні (5.145) використаємо властивість ортогональності функції Бесселя:

$$\int_0^1 J_m(\gamma_p x) J_m(\gamma_q x) x dx = \begin{cases} \frac{1}{2} [J'_m(\gamma_p)]^2, & \text{коли } p = q; \\ 0, & \text{коли } p \neq q, \end{cases} \quad (5.146)$$

де $J'_m(\gamma_p)$ – похідна функції Бесселя в точці γ_p .

Із системи рівнянь (5.145) і (5.146) знаходимо коефіцієнти розкладу:

$$C_i = 2[aJ'_i(\gamma_i)]^{-2} \int_0^a V'(r_0) J_1\left(\frac{\gamma_i r_0}{a}\right) r_0 dr_0. \quad (5.147)$$

Співвідношення (5.145) і (5.147) дозволяють побудувати ітераційний алгоритм для розв'язання рівняння (5.140):

1. Початкове значення комплексної амплітуди $V'(r_0)$ обираємо у вигляді

$$V'_1(r_0) = \sqrt{I'_0(r_0)} \exp[j\varphi_0(r_0)], \quad (5.148)$$

де $I'_0(r_0) = r_0^2 I_0(r_0)$; $I_0(r_0)$ – задана інтенсивність світла у фокальній площині лінзи; $\varphi_0(r_0)$ – випадкова оцінка фази.

2. На k -му кроці ітерацій функцію $V'_k(r_0)$ подамо як суму (5.145) з коефіцієнтами C_{ik} , які знаходять із рівняння (5.147). Потім зробимо заміну:

$$C'_{ik} = B_i \exp(j\nu_{ik}), \quad i \in [1, N], \quad (5.149)$$

де

$$B_i = 2r_i \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{2}\right); \quad (5.150)$$

$$\begin{cases} \varphi_i = -\pi - \varphi_{i+1} + 2\nu_{ik}, & i \in [N-1, 1]; \\ \varphi_N = \nu_{Nk}, \end{cases} \quad (5.151)$$

де $\nu_{Nk} = \arg C_{ik}$.

Фази φ_i знаходимо за допомогою рекурентних співвідношень (5.151), отриманих зі співвідношення (5.143).

3. Формуємо $k+1$ оцінку функції $V'_{k+1}(r_0)$:

$$V'_{k+1}(r_0) = \sum_{i=1}^N C'_{ik} J_1\left(\frac{\gamma_i r_0}{a}\right). \quad (5.152)$$

4. Розраховану функцію $V'_{k+1}(r_0)$ замінюємо на функцію $\bar{V}'_{k+1}(r_0)$ за правилом

$$\bar{V}'_{k+1}(r_0) = \sqrt{I'_0(r_0)} \frac{V'_{k+1}(r_0)}{|V'_{k+1}(r_0)|}. \quad (5.153)$$

5. Після знаходження функції (5.153) переходимо до кроку 2 і повторюємо кроки 3 та 4.

Метод послідовної ітерації для проектування ДОЕ, що формують осьовий розподіл інтенсивності. Розглянемо алгоритм для одновимірного випадку. Нехай на ДОЕ нормально падає когерентний пучок світла з довжиною хвилі λ , який має розподіл інтенсивності $I_0(x) = |V_0(x)|^2$ і постійну фазу. ДОЕ модулює цей пучок фазою $\varphi_{doe}(x)$ і формує поле за елементом з розподілом амплітуди $V(x) = V_0(x)\exp[j\varphi_{doe}(x)]$. Це поле розповсюджується у вільному просторі за ДОЕ і формує дифракційну картину у вихідній площині x_0 . Ми можемо зареєструвати різні розподіли інтенсивності на різній відстані від об'єкта z_i , де $i = 1, 2, \dots, n$ – номер вихідної площини. В результаті ми отримаємо оптичну систему з рядом вихідних площин x_{0i} (рис. 5.23), в яких розподіл амплітуди поля визначається за формулою дифракції Френеля (2.56):

$$V(x_{0i}) = \frac{\exp(jkz_i)}{j\lambda z_i} \int_{-\infty}^{\infty} V_0(x) \exp[j\varphi_{doe}(x)] \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z_i}(x_{0i} - x)^2\right] dx. \quad (5.154)$$

В формулі (5.154) фаза $\varphi_{doe}(x)$ ДОЕ повинна забезпечувати задану інтенсивність $I_{0i}(x_{0i})$.

Так як відомими є розподіл інтенсивності $I_0(x)$ на вході ДОЕ і необхідний розподіл інтенсивності на вихідних площинах $I_{0i}(x_{0i})$, то фазу можна визначити за допомогою ітераційного алгоритму (див. п. 5.4.3).

Процес відновлення починається з хвилі, амплітуда якої отримана шляхом знаходження квадратного кореня із першого розподілу інтенсивності $I_{01}(x_{01})$. Ця амплітуда множиться на фазу (для початку - фаза постійна $\varphi_{01}(x_{01}) = 0$) і отримуємо при цьому комплексну функцію, яка представляє хвильове поле $V(x_{01})$ в площині x_{01} . Для цієї функції розраховується за допомогою оберненого перетворення Френеля поле в площині ДОЕ $V_1(x)$. За допомогою перетворення Френеля (5.154) знаходимо комплексну амплітуду поля в площині x_{02} . В отриманому таким чином полі $V_1(x_{02})$ фаза залишається незмінною, а амплітуда замінюється функцією $\sqrt{I_{02}(x_{02})}$. Далі знову розраховується перетворення в площині ДОЕ, яке формує в результаті дифракції Френеля поле в третій площині x_{03} . Тут знову фаза залишається незмінною, а відбувається заміна амплітуди, і т.п. до n -ої площини. Цим закінчується перший етап (стадія) ітерації.

Друга стадія ітерації починається з порівняння квадрата амплітуди $|V(x_{0i})|^2$ розрахованого хвильового фронту із заданим розподілом інтенсивності $I_{0i}(x_{0i})$ за формулою середньоквадратичної похибки:

$$\delta^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n ||V(x_{0i})|^2 - I_{0i}(x_{0i})|^2}{\sum_{i=1}^n I_{0i}^2(x_{0i})}}. \quad (5.155)$$

5.5. Багатопорядкові дифракційні лінзи

Звичайні дифракційні лінзи використовують один певний порядок дифракції (наприклад, $m = 1$), в якому оптична сила лінзи прямо пропорційна довжині хвилі світла. У зв'язку з цим у разі освітлення білим світлом хвилі певної довжини фокусуються на різних відстанях від лінзи, що створює хроматичні аберації у зображенні. Наприклад, якщо біле світло фокусується на зелене випромінювання, то зелена складова фокусується в центрі, а червона і синя складові формують відповідно ореол навколо сфокусованого зображення (рис. 5.26, а).

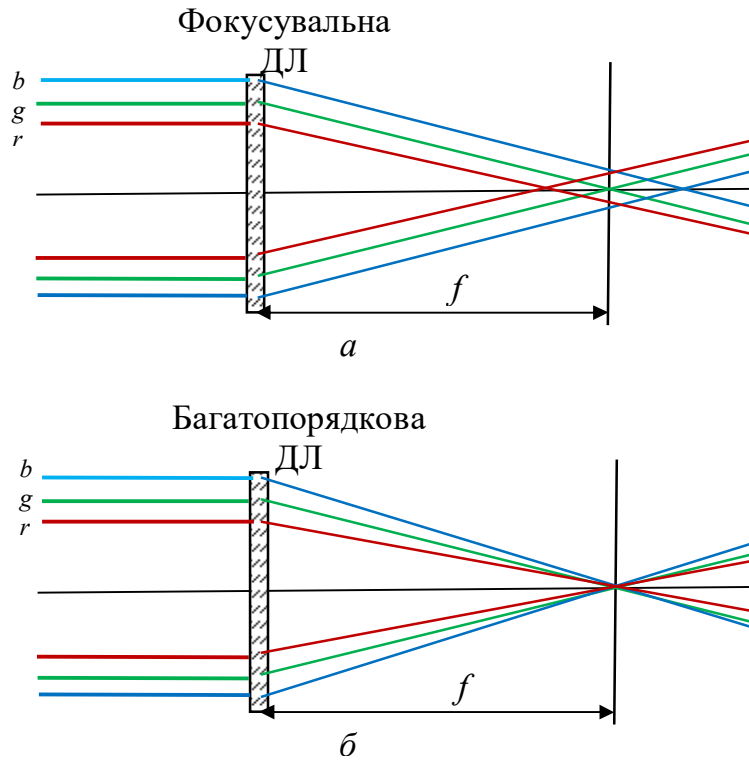


Рис. 5.26. Формування зображення у білому світлі у звичайній (а) і багатопорядковій (б) дифракційних лінзах

Головною особливістю багатопорядкових дифракційних лінз (БПДЛ, або MODL –Multi-Order Diffractive Lens) є те, що вони спроектовані для фокусування хвиль усіх довжин в одну точку фокуса з високою ефективністю, що дозволяє формувати чітке зображення для всіх хвиль (рис. 5.26, б).

Багатопорядкова ДЛ складається із концентричних зон Френеля (рис. 5.27). Радіуси зон визначають із розв’язку рівняння $\varphi_{doe}(R_q) = 2\pi pq$. Ширина кожної зони проектується з умови забезпечення зміни фази хвильового фронту на $2\pi i$, де $i = 1, \dots, p$.

Залежність дифракційної ефективності ДЛ від довжини хвилі, коли параметр $p = 10$, показано на рис. 5.28. Зазначимо, що декілька довжин хвиль забезпечують 100-відсоткову дифракційну ефективність. Отже, є можливість сформувати високоякісне зображення одночасно для всіх довжин хвиль.

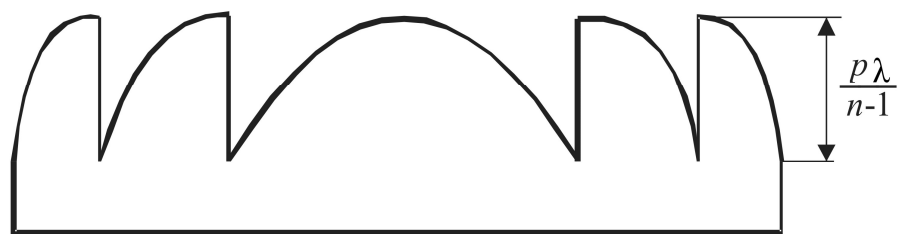


Рис. 5.27. Переріз багатопорядкової дифракційної лінзи

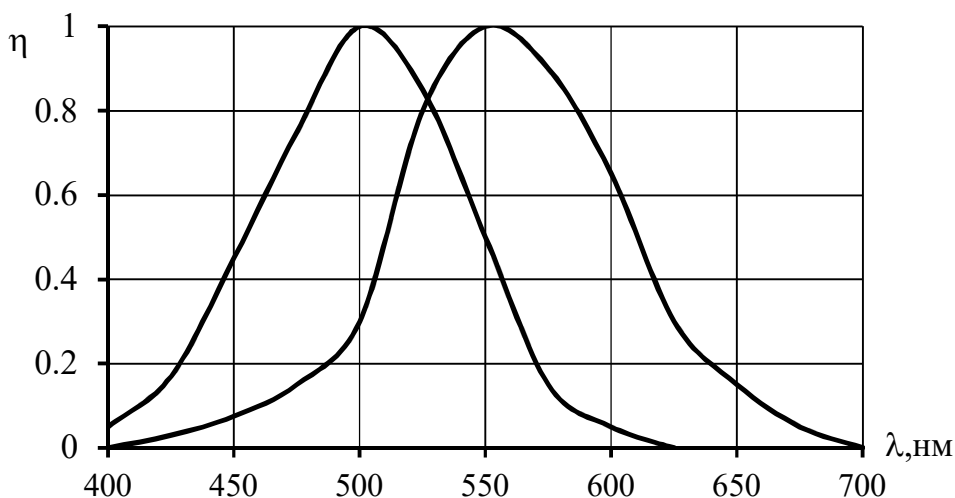


Рис. 5.28. Залежність дифракційної ефективності багатопорядкової дифракційної лінзи від довжини хвилі, коли $p = 10$

5.6. Дифракційно-рефракційні мультифокальні інтраокулярні лінзи

5.6.1. Біфокальні дифракційно-рефракційні інтраокулярні лінзи

Кожен рік у світі проводиться близько 3 млн. операцій із заміни хірургічним шляхом помутнілого від катаракти кришталика на штучну лінзу. За даними Всесвітньої організації охорони здоров'я 43 % випадків сліпоти обумовлено катарактою [24].

Основна оптична функція кришталика – формування зображення на сітківці з однаковою якістю дальніх і ближніх предметів. Кришталик має бути прозорим у видимій області спектра і поглинати шкідливе для сітківки ультрафіолетове випромінювання. Катаракта спричиняє поступову втрату прозорості кришталика, крім того, у міру старіння людини поступово погіршується його акомодация. Ця проблема виникає у людей старших за 45 років. Людина виявляє, що не може чітко бачити близькі предмети, а біфокальні

окуляри з використанням сегментів лінз із різною оптичною силою у нижній та верхній частинах поля зору частково вирішили проблему акомодації й досі ефективно використовуються.

На початку 80-х років XX ст. було запропоновано біфокальні дифракційно-рефракційні лінзи, в яких ефект біфокальності досягається за рахунок дифракції світлового потоку на неперервному мікрорельєфі поверхні лінзи, що дозволяє отримати рівні інтенсивності нульового і першого порядків дифракції. Щоб забезпечити такий розподіл інтенсивності за порядками зміна фази між дифракційними зонами має бути рівною π . Це відповідає глибині мікрорельєфу близько 1,6 мкм з показником заломлення матеріалу лінзи 1,5.

До нового покоління дифракційно-рефракційних лінз належать лінзи Acrysof ReSTOR корпорації «Alcon» (США), AcriLisa німецької фірми «Acritec» і лінза Tecnis ZM900 фірми «AMO» (США). Для цих лінз характерні:

- еластичність, щоб була можливість їх імплантувати через малий розріз;
- гідрофобність матеріалу (наприклад, акрил або силікон), щоб мінімізувати біологічні відкладення на дифракційному мікрорельєфі й післяопераційні ускладнення;
- додаткова оптична сила, яка створюється дифракційною структурою, становить близько +4 діоптрії, щоб інтенсивність розфокусованого зображення була значно меншою за інтенсивність сфокусованого;
- поглинання ультрафіолетового випромінювання для захисту сітківки.

Гібридна мультифокальна лінза AcriLISA являє собою монолітну асферичну біфокальну інтраокулярну лінзу (ІОЛ), виготовлену із гідрофобного акрилу з корекцією аберацій. Назва лінзи LISA – аббревіатура від слів, які характеризують основні споживчі властивості лінзи: L – енергія світла (Light), що надходить до нульового і першого фокусів, розподіляється так: 65 % до фокусу дальнього зору (рефракційна складова) і 35 % до фокусу ближнього зору (дифракційна складова); I – незалежність (Independence) біфокальної

роботи від розміру зіниці завдяки повному покриттю поверхні лінзи дифракційним мікрорельєфом; S – відсутність різких меж рефракційно/дифракційного профілю (Smooth); A – оптимізована асферична поверхня рефракційного компонента. Додаткова оптична сила цієї ІОЛ у ближньому фокусі +3,75D. Лінзу можна імплантувати через надмалий розріз (менше 2 мм).

Трикомпонентна силіконова дифракційна мультифокальна лінза Tecnis ZM 900 має діаметр оптичної частини 6 мм. Дифракційна структура, що нанесена на задню поверхню лінзи, забезпечує додаткову оптичну силу +4,00D, при цьому падаюче світло рівномірно (по 40 % від загальної кількості енергії) розподіляється між ближнім і дальнім зором за будь-якого розміру зіниці. Передня поверхня лінзи має асферичну форму для компенсації аберацій рогівки. Лінза вживлюється через розріз розміром 2,8 мм.

Акрилові еластичні лінзи ReSTOR випускаються у двох варіантах: монолітному – MA60D3 та трикомпонентному – MA60D3. Діаметр оптичної частини обох варіантів – 6 мм. Лінзи вживлюються через отвір до 2,8 мм. Дифракційна структура лінзи ReSTOR має оптичну силу +4,00D, що забезпечується 12 дифракційними зонами, глибина яких зменшується з віддаленням від центру. Ці лінзи не мають асферичних поверхонь, що знижує їх просторове розділення. Але лінзи з асферичними поверхнями мають більш жорстокі вимоги до центрування під час імплантації по відношенню до оптичної осі ока, що утруднює їх хірургічне вживляння. Однак лінзам ReSTOR властивий інший недолік: через малий діаметр дифракційної структури (близько 3,6 мм) вони чутливі до зміщення центра зіниці відносно оптичної осі ока, яке часто виникає під час імплантації лінзи. Попри ці недоліки лінза ReSTOR найбільш поширена в офтальмологічній практиці.

У Росії почався випуск дифракційно-рефракційних лінз МІОЛ-Аккорд, які мають багато спільного з AcriLISA і Tecnis ZM900 [24]. Дифракційна структура в

лінзах МІОЛ-Аккорд сформована на плоскій поверхні, що спрощує технологію їх виготовлення. Проведені порівняльні дослідження лінз МІОЛ-Аккорд і ReSTOR показали, що якість зображення для обох лінз відповідає дифракційній межі (роздільна здатність не менше 100 лін/мм). У ближньому і дальньому фокусах ФРТ мають симетричну форму. Гострота зору для обох лінз без додаткової окулярної корекції в дальній і ближній зонах становить не менше 0,5 діоптрій. Лінзи МІОЛ-Аккорд і ReSTOR можна віднести до ІОЛ нового покоління.

У біфокальних рефракційних лінзах розподіл енергії в кожному фокусі залежить від площі апертури лінзи відповідного фокуса. У дифракційно-рефракційних лінзах розподіл енергії у фокусі не залежить від зміни площі апертури лінзи. Незалежність розподілу енергії між фокусами від діаметра апертури є головною перевагою дифракційно-рефракційних лінз перед мультифокальними рефракційними лінзами.

Залежно від профілю кільцевих канавок на поверхні ІОЛ лінзи і від їх глибини такі лінзи можуть бути монофокальними, біфокальними і трифокальними. Найчастіше виготовляють дифракційно-рефракційні ІОЛ з профілем канавок двох типів: трикутним і прямокутним.

5.6.2. Дифракційно-рефракційні лінзи з трикутним профілем

Радіуси кільцевих канавок розраховують таким чином, щоб різниця ходу променів від зовнішнього і внутрішнього кола до заданої точки на оптичній осі лінзи дорівнювала половині довжини хвилі. Такі канавки називають *зонами Френеля*. Без сферичної аберації радіуси зон Френеля можна розрахувати за формулою (5.11), яку подамо у вигляді

$$R_q = R_1 \sqrt{q}, \quad (5.156)$$

де R_1 – радіус першої зони Френеля; q – номер зони Френеля.

Величину радіуса першої зони Френеля R_1 для оптичної системи точно розрахувати можна тільки за допомогою комп'ютерного моделювання, яке дозволяє також розрахувати радіуси зон Френеля з урахуванням

сферичної аберації.

Об'єднуючи попарно кожні два сусідніх кільця, формують канавки з трикутним профілем глибиною h , як показано на рис. 5.29.

Точний розрахунок просторового розподілу світлової енергії, що формується оптичною системою ока з дифракційно-рефракційною ІОЛ, може бути виконаний тільки за допомогою комп'ютерного моделювання.

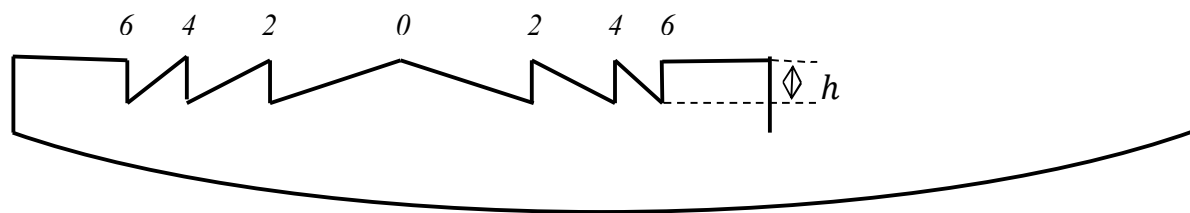


Рис. 5.29. Дифракційний мікрорельєф із трикутним профілем
(позначено зовнішні краї парних зон Френеля)

5.6.3. Дифракційно-рефракційні лінзи з прямокутним профілем

Радіуси кільцевих зон Френеля розраховують так само, як і для лінз із трикутним профілем. Парні, або непарні зони Френеля заглиблюються на глибину h , утворюючи прямокутний профіль, як показано на рис. 5.30.

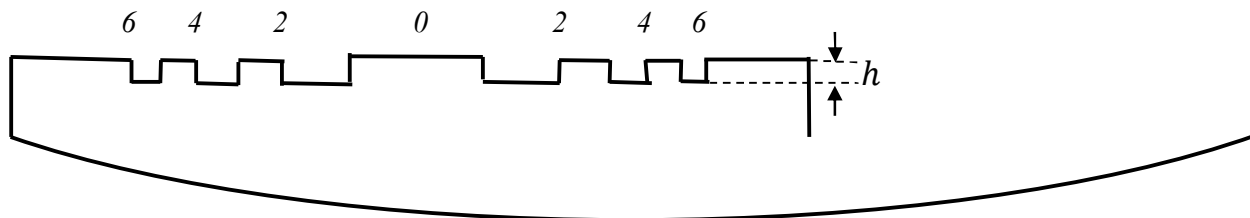


Рис. 5.30. Дифракційний мікрорельєф із прямокутним профілем
(позначено зовнішні краї парних зон Френеля)

Кількість канавок також удвічі менша від кількості зон Френеля, як і у попередньому випадку, але кожна канавка перекриває тільки одну зону Френеля, тому прямокутний рельєф є більш дрібноструктурною конструкцією, ніж трикутний рельєф, зображений на рис. 5.29. Глибина канавок, як і в попередньому випадку, керує розподілом світлової енергії між фокусами і приблизно дорівнює середній глибині трикутних канавок. Отриманий за допомогою комп'ютерного моделювання розподіл світлової енергії між

дифракційними максимумами, які формуються оптичною системою ока з дифракційно-рефракційною лінзою, також залежить від глибини канавок h прямокутного профілю.

Дифракційна структура з прямокутним профілем може давати два приблизно рівних максимуми плюс першого і мінус першого порядків, або три дифракційні максимуми плюс першого, нульового і мінус першого порядків. Амплітуда кожного із двох максимумів лінзи з трикутним профілем більша, ніж амплітуда кожного із трьох дифракційних максимумів лінзи з прямокутним профілем. Для трикутного профілю амплітуда максимумів близька до своєї абсолютної теоретичної межі, а для прямокутного профілю амплітуда максимумів приблизно на 30–40 % менша. Для технічних застосувань така відмінність може виявитися істотною, але для ІОЛ адаптаційні здібності зорового аналізатора людини без зусиль можуть компенсувати таку зміну інтенсивності.

5.6.4. Дифракційна інтраокулярна лінза

Розглянемо один із варіантів побудови дифракційної інтраокулярної лінзи (ДІОЛ), який наведено в патенті [25]. Лінза виготовляється із біосумісного еластичного матеріалу та являє собою тонку пластину, на одну поверхню якої нанесено мікрорельєф у вигляді колової дифракційної ґратки з профілем «блиску». Оптична сила ДІОЛ створюється за рахунок дифракції світла на структурованій поверхні. Максимальна глибина профілю мікрорельєфа однакова по всій поверхні лінзи. Лінза має однакову оптичну силу принаймні для двох довжин хвиль видимого діапазону спектра, тобто вона є ахроматичною. Крім того, для збільшення об'єму псевдоакомодації ока лінза розбита на парну кількість секторів, які мають різну оптичну силу, або суміщена з коловою дифракційною ґраткою з постійним кроком. Розширення об'єму псевдоакомодації ока становить 0–4 діоптрії. Для відхилення оптичної осі й проектування зображення на парамакулярну частину сітківки (у разі пошкодження макули) дифракційна лінза об'єднана з

лінійною дифракційною ґраткою. Перевагою цієї лінзи є збільшення гостроти зору за рахунок компенсації аберації роївки.

Дифракційна лінза обмежена двома плоскими поверхнями, одна з яких має мікрорельєф. Оптична сила утворюється тільки за рахунок дифракції світла на колових зонах мікрорельєфу поверхні.

Радіуси колових зон ДІОЛ визначають за формулою (5.36), яку запишемо у вигляді

$$R_q^2 = 2q\lambda_0 f + (q\lambda_0)^2, \quad (5.157)$$

де f – фокусна відстань лінзи; q – номер зони; λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Кожна межа зони закінчується сходиною, яка вносить до світлового променя різницю ходу λ_0 , що відповідає скачку фази на 2π радіан. Форма і глибина профілю поверхні у межах зони визначає ефективність лінзи і розподіл вхідної енергії за дифракційними порядками.

Максимальна оптична глибина мікрорельєфу однакова по всій поверхні лінзи і становить декілька довжин хвиль видимого спектра. Така ДІОЛ належить до класу багатопорядкових дифракційних лінз. Геометрична глибина мікрорельєфу

$$h_{\max} = \frac{p\lambda_0}{n_2 - n_1}, \quad (5.158)$$

де λ_0 – довжина хвилі у вакуумі, де око має найбільшу чутливість, $\lambda_0 = 0,555$ мкм; n_1 і n_2 – показники заломлення очної рідини і матеріалу лінзи відповідно; p – ціле число, яке лежить в межах від 3 до 20. Мінімальне значення глибини $h_{\text{opt}} = p\lambda_0$ дорівнює відрізку, в якому хоч дві довжини хвилі видимого діапазону вміщуються ціле число разів. Ці дві довжини хвилі належать до фіолетової і червоної частин спектра і симетричні відносно довжини хвилі λ_0 (рис. 5.31).

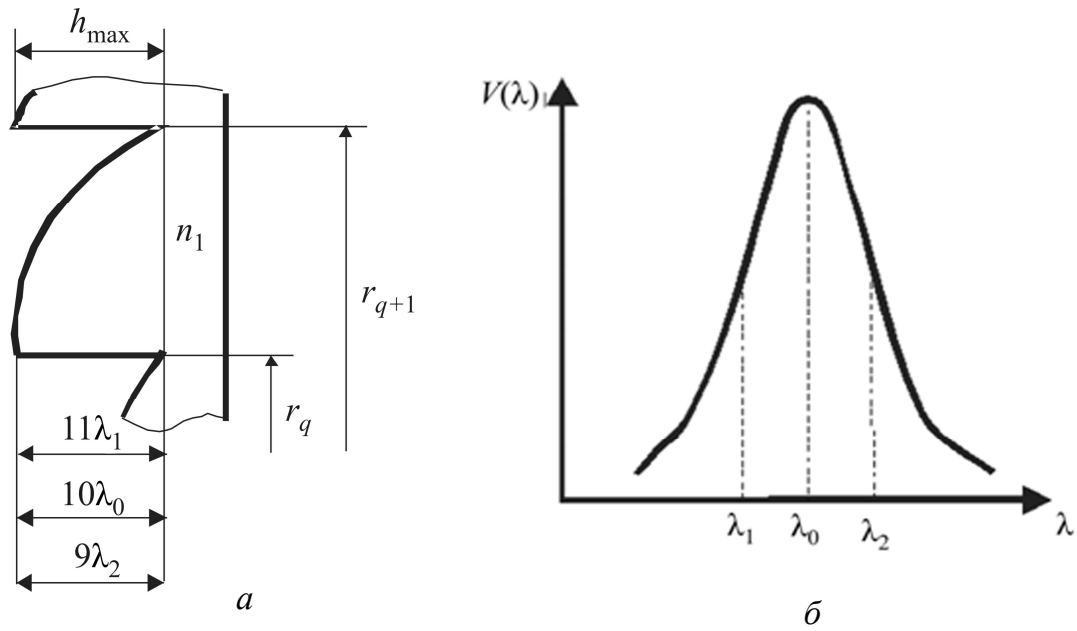


Рис. 5.31. Пояснення до роботи багато порядкової дифракційної лінзи:
 а – профіль зон, коли $p = 10$; б – спектральна чутливість ока: $\lambda_0 = 0,555$ мкм;
 $\lambda_1 = 0,520$ мкм; $\lambda_2 = 0,610$ мкм

Структуровану поверхню ДІОЛ виконано у вигляді колової дифракційної ґратки, глибину якої розраховують за формулою

$$h(r) = a_1 - a_2 r^2 + a_3 r^4. \quad (5.159)$$

Коефіцієнт a_1 у формулі (5.159) залежить від максимальної глибини h_{\max} сходинки дифракційного мікрорельєфу і номера зони q :

$$a_1 = h_{\max}(q + 1). \quad (5.160)$$

Значення h_{\max} обчислюють за формулою (5.158), а радіуси зон R_q визначають із формули (5.159), коли $h(R_q) = h_{\max}$, підставляючи у формулу (5.160) $q = 1, 2, \dots$.

Постійний коефіцієнт a_2 характеризує оптичну силу ДІОЛ у середовищі ока:

$$a_2 = \frac{n_1}{2f_2(n_2 - n_1)}, \quad (5.161)$$

де f_2 – фокусна відстань лінзи в середовищі.

Постійний коефіцієнт a_3 характеризує зміну оптичної сили в периферійній частині лінзи. Ці зміни потрібні для корекції аберацій рогівки й аберацій, обумовлених положенням лінзи у пучку променів, що збігаються. Коефіцієнт

a_3 вносить компенсаційну асферичну добавку до хвильового фронту, що пройшов крізь лінзу:

$$a_3 = \frac{Cn_1}{8f_2^3\Delta n}, \quad (5.162)$$

де C – безрозмірний коефіцієнт, який залежить від оптичних параметрів ДІОЛ, рогівки і положення лінзи в оптичній системі ока,

$$C = \frac{f_1 f_2^3}{(n_1 - 1)^2 s_2^4} + 3 \frac{f_2^2}{s_2^4} + 3 \frac{f_2}{s_2} + 1, \quad (5.163)$$

де f_1 і f_2 – фокусні відстані рогівки та кришталіка в середовищі відповідно; s_2 – відстань від кришталіка до зображення об'єкта рогівкою, яке є предметом для кришталіка.

Крім того, для збільшення глибини фокусування та об'єму псевдоакомодації ДЛ з кіноформним профілем виготовлено із набору парної кількості секторів, центри яких лежать на оптичній осі. Сектори об'єднані у дві групи, кожна з яких займає половину ефективної площі лінзи і має різну оптичну силу. Все світло, що надходить до кришталіка, розділяється лінзою на дві половини по 50 % у кожній і збирається до двох фокусів, або проектує на сітківку зображення близьких і дальніх об'єктів. Збільшення глибини фокусування досягається також введенням у структуру колових зон дифракційної колової ґратки з постійним кроком. У цьому випадку радіуси зон і висота профілю в межах кожної зони пов'язані співвідношенням

$$h(r) = a_1 - a'_2 r - a_2 r^2 + a_3 r^4, \quad (5.164)$$

де a_1 , a'_2 , a_2 і a_3 – постійні, які характеризують глибину профілю, оптичну силу та її зміну. Постійні a_1 , a_2 і a_3 у формулі (5.164) визначаються із співвідношень (1.160)–(1.163), а a'_2 залежить від кута дифракції φ_d на коловій ґратці з постійним кроком

$$a'_2 = \frac{\sin \varphi_d}{\Delta n}. \quad (5.165)$$

Крім того, на структуру колових зон нанесена лінійна дифракційна ґратка, яка має пилкоподібний профіль штрихів і постійний крок,

$$d = \frac{\lambda}{\sin \varphi_0}. \quad (5.166)$$

Формула (5.166) отримана з рівняння дифракційної ґратки, яка забезпечує кут дифракції φ_0 у першому порядку.

5.6.5. Особливості проектування дифракційно-рефракційних біфокальних лінз

Із аналізу наведених раніше матеріалів можна відмітити особливості проектування дифракційно-рефракційних біфокальних інтраокулярних лінз. Зміна числа зон Френеля, їх глибини і форми впливає на інтенсивність і якість зображень в нульовому, першому і більш високих порядках. В більшості випадків інтраокулярні і контактні біфокальні лінзи використовують класичний профіль реверсивної пластинки Релея-Вуда. На одну із поверхонь базової лінзи, яка має сферичні або асферичні поверхні, наносять пилкоподібний вісесиметричний дифракційний профіль (ешелет) (рис. 5.32).

Для наочності геометрію профілю можна показати на перерізу дифракційної поверхні, нанесеній на плоскій базовій кривій (рис. 5.33,а). Вертикальна вісь представляє фізичну товщину (висоту h) профілю, а горизонтальна вісь – радіальний розмір r лінзи. Профіль N -ої зони визначається за формулою (5.30), яку представимо у вигляді:

$$h(r) = h_{max} \left(N - \frac{r^2}{w_1^2} \right), \quad (5.167)$$

де h_{max} – максимальна висота профілю; w_1 – радіус першої зони.

Для контактних і інтраокулярних лінз цей профіль діє як оптична межа розділення між матеріалом лінзи і слізним шаром або водянистою рідиною ока. Оскільки показник заломлення n_l матеріалу лінзи відрізняється від показника заломлення n_w водянистої рідини, то промені, що проходять через різні ділянки дифракційного профілю, будуть зміщені на різні фази. Зміщення фаз φ_l пропорційне висоті профілю h , а висота, яка необхідна для отримання певної фази, визначається за формулою:

$$h = \frac{\varphi_l}{2\pi} \frac{\lambda}{(n_l - n_w)}, \quad (5.168)$$

де φ_l – створений фазове зміщення у радіанах; λ – довжина хвилі в мкм.

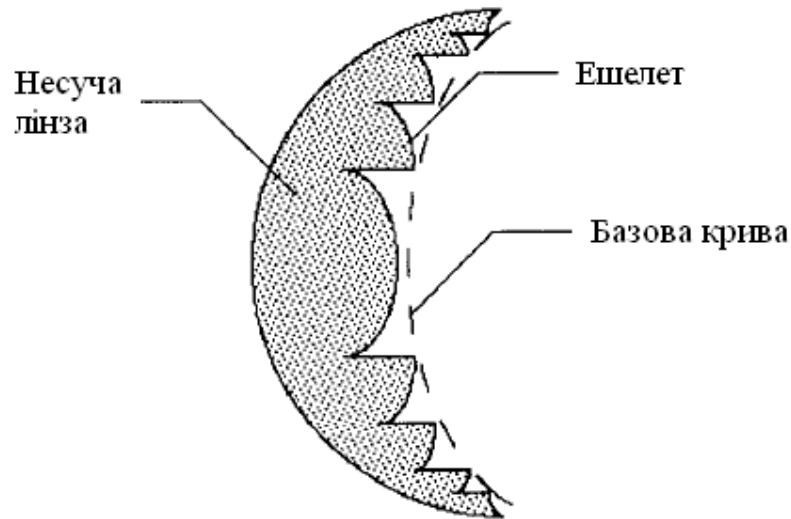
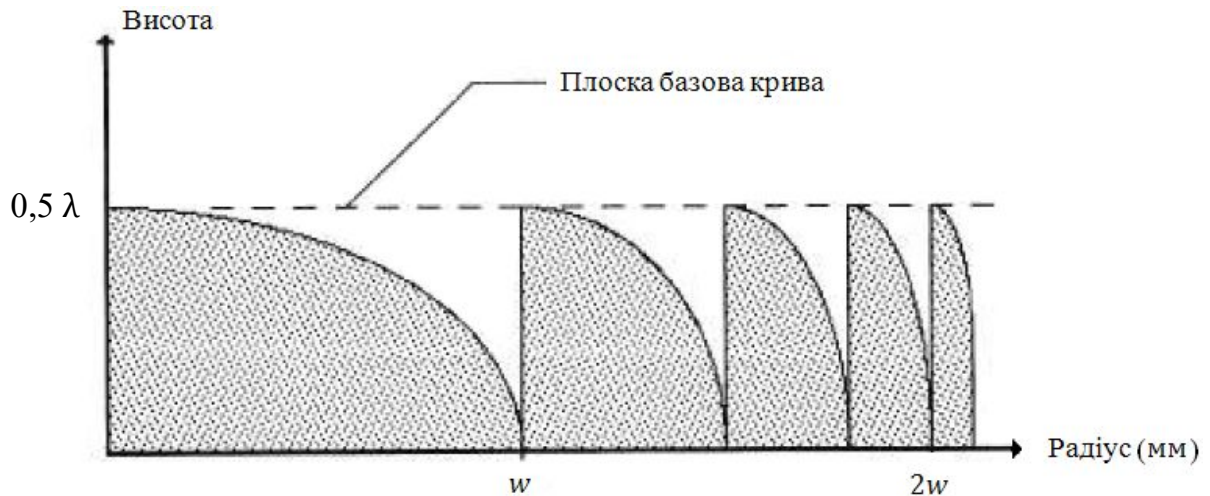


Рис. 5.32. Дифракційна біфокальна контактна лінза

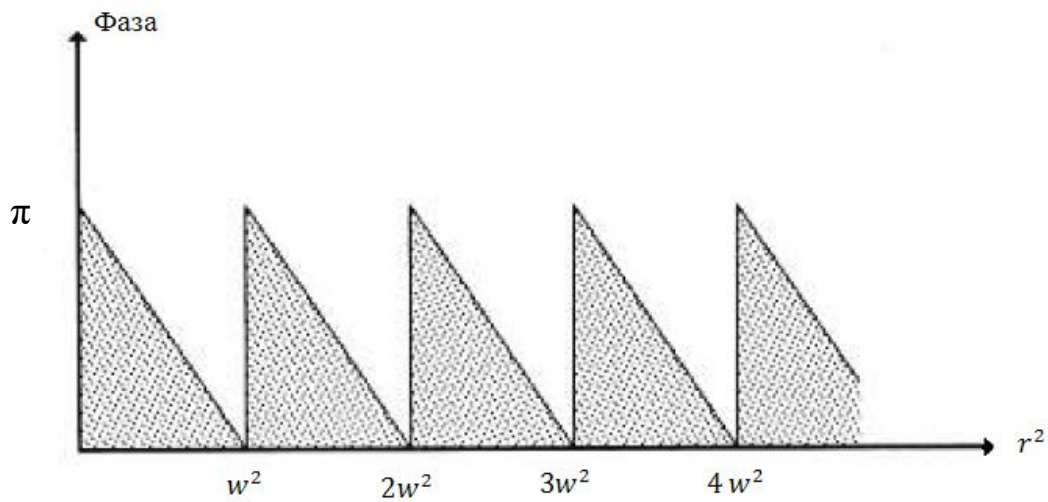
Оскільки око людини найбільш чутливе до довжини хвилі світла 0,555 мкм, офтальмологічні дифракційні біфокальні лінзи проєктуються саме для цієї довжини хвилі. Як правило, висота мікрорельєфу визначається в мікрометрах, а світловий діаметр лінзи – в міліметрах. Для наочності, масштаб по вертикальній осі збільшують в 1000 разів порівняно з горизонтальною віссю.

Враховуючи той факт, що висота профілю пропорційна квадрату радіуса, інколи дифракційний профіль зручніше подавати r -квадратичному просторі, як показано на рис. 5.33,б. В цьому випадку горизонтальні ділянки відповідають квадрату радіуса, а не радіусу. Тому профіль ДЛ виглядає як лінійна пилкоподібна структура однакових ешелетів в r -квадратичному просторі. На рис. 5.33,б наведена фазова функція профілю ДЛ з максимальною фазою π або півдовжини хвилі. Це стандартний півхвильовий профіль, який розділяє світло порівну між дальнім і ближнім фокусами.

Із розглянутого r -квадратичного простору стає зрозумілим, що пилкоподібний профіль повністю визначається шириною першої зони w_1 і максимальною висотою профілю h_{max} . Цими параметрами визначається загальна оптична сила біфокальних лінз і розподіл інтенсивності випромінювання, сфокусованого в кожній площині зображення.



а)



б)

Рис. 5.33. Поверхневий рельєф дифракційного профілю: а – в реальному просторі; б – в r -квадратичному просторі

Оптична сила Φ_l регулюється шляхом зміни ширини дифракційних канавок (зон). Якщо ширина зони збільшується, то оптична сила лінзи зменшується, і навпаки. Оптична сила ДЛ визначається співвідношенням

$$\Phi_l = \frac{2\lambda}{w_1^2}, \quad (5.169)$$

де λ і w_1 вимірюються в мм, а Φ_l – в діоптріях.

Для прикладу, при $\lambda = 0,555$ мкм дифракційна бінарна лінза матиме оптичну силу $\Phi_l = 2,0$ дптр, якщо радіус першої (центральної) зони $w_1 = 0,75$

мм. Якщо лінза містить дев'ять зон, вона матиме світловий діаметр (апертуру) 4,5 мм.

Висоту профілю можна змінювати для регулювання розподілу світла між дальнім і ближнім зображеннями без зміни оптичної сили лінзи. У випадку стандартного пилкоподібного профілю його максимальна висота викликає фазовий зсув $\varphi_l = \pi$. За допомогою такого профілю бінарна лінза розділяє падаюче світло порівну між дальнім і ближнім зображеннями. Нормована інтенсивність зображень I_{dist} та I_{near} визначається за формулами:

$$I_{dist} = \text{sinc}^2 k_l; \quad I_{near} = \text{sinc}^2(k_l - 1), \quad (5.170)$$

де $k_l = \varphi_l / 2\pi$.

Для стандартного пилкоподібного профілю $k_l = 0,5$, а інтенсивність у кожному фокусі становить 40,4%. Інші 19% падаючого світла фокусуються у фокусах вищих порядків і формують фонове випромінювання, що властиво ДЛ. Змінюючи стандартний профіль, ми зможемо проектувати біфокальні лінзи, які формують або дальнє, або ближнє зображення. Наприклад, якщо висота профілю менша, ніж $\lambda/2$, то дальнє зображення буде більш інтенсивним. Якщо максимальна висота $h_{max} = \lambda$, то дифракційний профіль буде фокусувати падаюче світло у близькому зображенні.

Лінійний пилкоподібний профіль має тільки два змінних (розрахункових) параметра, а саме ширину і висоту профілю. Однак використовуючи нелінійний геометричний профіль в r -квадратичному просторі, можна змінювати оптичні параметри ДЛ. За таких умов зміна форми профілю не буде змінювати оптичну силу ДЛ при фіксованій ширині зони.

На рис. 5.34 наведено профіль з косинусним кроком, який для q -ої зони визначається рівнянням

$$h(r) = \frac{1}{2} h_{max} \left[1 - (-1)^q \cos\left(\frac{\pi r^2}{w_1^2}\right) \right]. \quad (5.171)$$

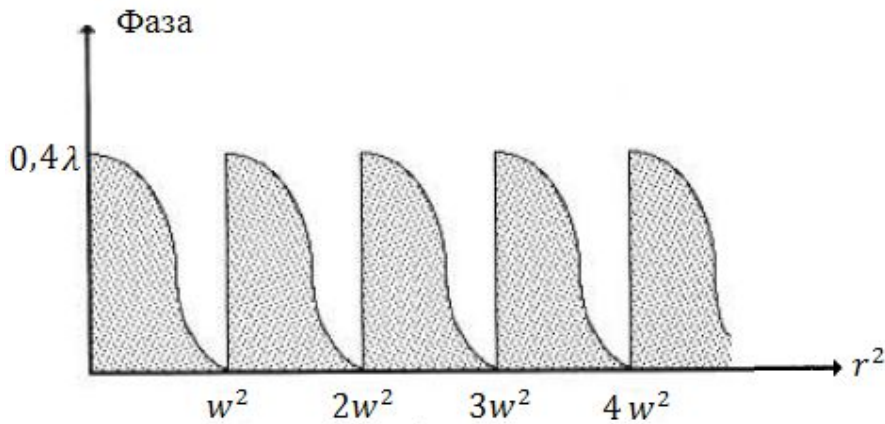


Рис. 5.34. Поверхневий рельєф ДЛ з косинусним кроком

Якщо нам потрібно розділити світло, що проходить через ДЛ, порівню між дальнім і ближнім зображеннями, то кожне зображення матиме близько 40,3% світла, що схоже на випадок стандартного пилкоподібного профілю. Однак для такого профілю світло ділиться порівну при $k_l = 0,4$. Це означає, що такий профіль матиме на 20% меншу глибину, ніж стандартний пилкоподібний профіль.

Профіль з косинусним кроком має ряд переваг у порівнянні із стандартним пилкоподібним профілем. Його мілкий профіль буде збирати менший об'єм сльозової рідини, що призводить до меншого накопичення сміття. Крім того, ешелети із косинусним кроком дотикаються до базової поверхні контактної лінзи і повинні комфортніше рухатись (ковзати) по рогівці, ніж гостро заточений ешелет пилкоподібного профілю.

19% світла, що пройшло через ДЛ, концентрується у фокусах високих порядків, створюючи тим самим фон. Тому було б добре зменшити величину цього фону. Такий ефект можна досягти за рахунок поглинаючого профілю, як показано на рис. 5.35. Непрозорі кільця розташовані на границях зон і мають однакову ширину в r -квадратичному просторі. Нехай коефіцієнт пропускання ДЛ з непрозорими кільцями становить τ_l . У цьому випадку інтенсивність зображення визначається як

$$I_{dist} = I_{near} = \tau_l^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau_l}{2}\right). \quad (5.172)$$

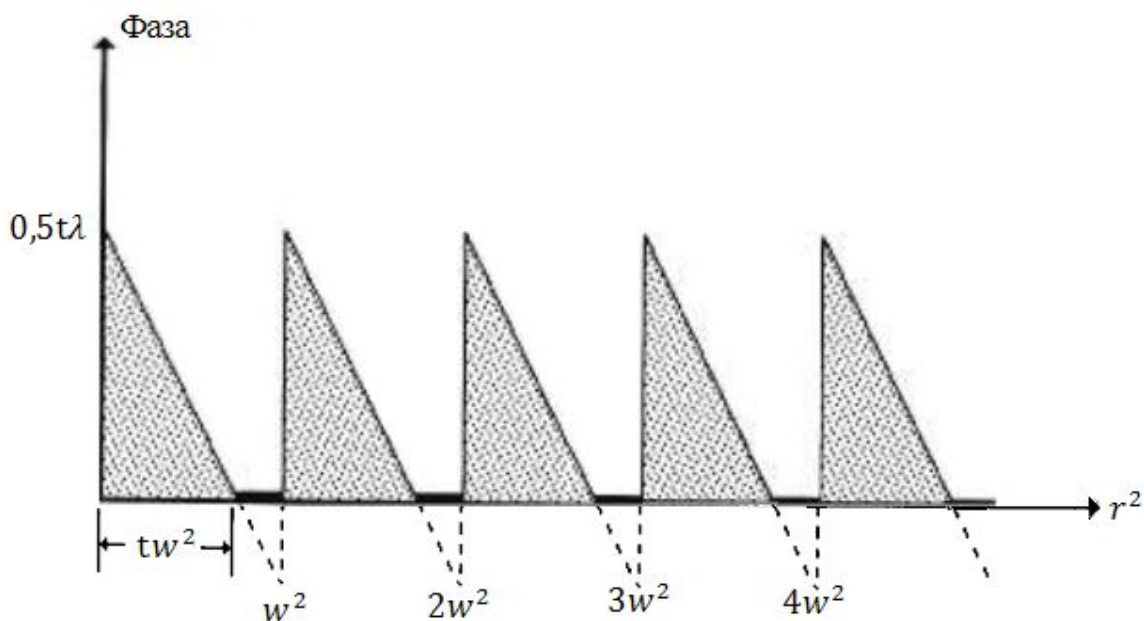


Рис. 5.35. Поверхневий профіль рельєфу з поглинаючою сіткою

Наявність такої поглинаючої сітки зменшує світло, яке спрямоване до фокусів високих порядків. Наприклад, якщо $\tau_l = 0,8$, то інтенсивність світла, що надходить до фокусів високих порядків, буде зменшена з 19% до 6,4%. Хоча інтенсивність світла в ближньому і дальньому зменшується до 36,8%, але дифракційна ефективність ДЛ збільшується з 40,5% до 46%.

5.6.6. Трифокальні дифракційні лінзи

Дифракційні мультифокальні лінзи знайшли за останні п'ятнадцять років широке впровадження в офтальмології в якості контактних лінз для корекції пресбіопії і інтраокулярних лінз для лікування катаракти шляхом хірургічної заміни кришталика ока. В більшості випадків застосовують біфокальні: одна оптична сила використовується для чіткого бачення віддалених об'єктів, а друга – для чіткого бачення близьких об'єктів. Переваги мультифокальних ДЛ перед рефракційними лінзами полягають у відсутності у дифракційних лінз залежності від розміру зіниці ока та меншого впливу децентровки ДЛ на якість зображення. В той же час ДЛ мають значні хроматичні аберації, хоч вони і компенсуються матеріалом лінзи, а також природними хроматичними абераціями ока.

Біфокальні лінзи не можуть в повній мірі задовольнити пацієнтів, в яких обмежена або нульова акомодация. Навіть якщо має місце корекція для бачення на дальні і ближні об'єкти, зір не буде чітким на середній відстані. Наприклад, пацієнт з акомодациєю 1 дптр, який використовує стандартні біфокальні лінзи з додатковою оптичною силою в 2 дптр має розмиті зони бачення в межах від 50 до 100 см. Ця проблема може бути вирішена трифокальними лінзами з додатковими оптичними силами в 1 і 2 дптр.

Основою для створення трифокальних ДЛ служать дифракційні ґратки з фазовим профілем $b\cos(2\pi ax)$ або $\arctg[b\cos(2\pi ax)]$, які використовуються для розділення одного пучка на три пучка з однаковою або різною інтенсивністю. Такі моделі ґратки можна розповсюдити на трифокальні ДЛ, заміною координати x на квадрат радіальної координати r^2 .

В статті [26] наведені результати досліджень трифокальної ДЛ з фазовим профілем $b\cos(2\pi ar^2)$, яка працює спільно з оптичною системою ока. В основу цих досліджень покладені поперечна і повздовжня функції розсіювання точки, або модуляційна передавальна функція.

На одну із поверхонь рефракційної лінзи наносять мікрорельєф кругової симетрії, висота якого змінюється по закону

$$h(r) = h_0 \cos(2\pi ar^2), \quad (5.173)$$

де $h(r)$ – значення висоти профілю відносно базової поверхні. За цих умов оптична висота профілю визначається як

$$h_{opt}(r) = (n_2 - n_1)h_0 \cos(2\pi ar^2) = b\cos(2\pi ar^2), \quad (5.174)$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення оточуючого середовища (слізної оболонки або очної рідини) і матеріалу лінзи відповідно; $b = (n_2 - n_1)h_0$.

Тоді фазова функція мультифокальної ДЛ визначається як

$$\varphi_{lens}(r) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[b\cos(2\pi ar^2) - p_{base} \left(\frac{r^2}{2} \right) \right], \quad (5.175)$$

де kp_{base} – фазова функція рефракційної лінзи, на поверхні якої розташована ДЛ.

Додаткову оптичну силу ДЛ визначимо як

$$p_a = \frac{1}{f + \Delta f} - \frac{1}{f}, \quad (5.176)$$

де f – фокусна відстань ока; Δf – зміщення фокуса. Зв'язок між додатковою оптичною силою p_a і оптичною координатою визначається співвідношенням:

$$p_a = \frac{u}{R_p^2 + fu}, \quad (5.177)$$

де $u = \left(\frac{R_p}{f}\right)^2 z$; z – координата уздовж оптичної осі.

В статті [26] також наведені результати досліджень ФРТ трифокальної лінзи для випадку, коли довжина хвилі $\lambda = 0,555$ мкм, фокусна відстань і радіус зіниці ока $f = 22,6$ мм і $R_p = 3,5$ мм.

На рис. 5.36 наведені осьові ФРТ лінзи з фазовим профілем (5.175), коли $a = 1,724$ мм², $b = 0,127$ мкм, $p_{base} = 0$. Такі параметри забезпечують зміну оптичної сили в 2 дптр між сусідніми фокусами і однакову енергію у трьох фокусах. Параметр b визначається максимальною глибиною профілю $2h_0 = 1,15$ мкм і показниками заломлення оточуючого середовища очної рідини $n_1 = 1,33$ і матеріалу лінзи $n_2 = 1,55$. Крім того, в фокусах зосереджено 90% світлової енергії. Звичайні біфокальні ДЛ концентрують у фокусах лише 80% світла, що призводить до зниження контрасту зображення. Положення фокусів уздовж приведеної координати u визначається як $u_f = 0, \pm 2\lambda R_p^2 a$. На рис. 5.36 центральний максимум відповідає оптичній силі ока, а нормування ФРТ здійснюється відносно ФРТ ока без ДЛ.

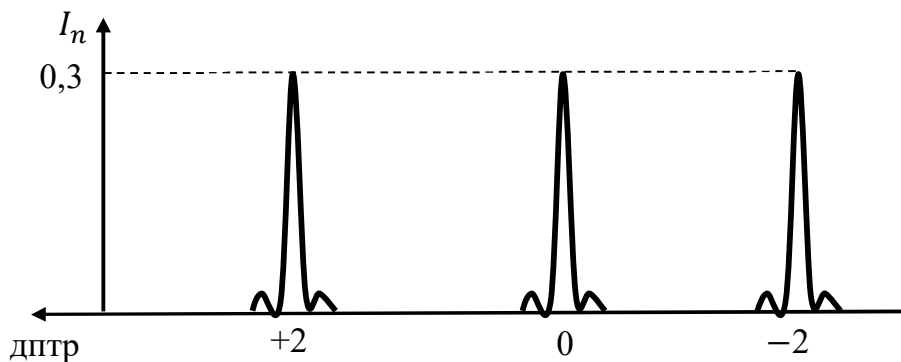


Рис. 5.36. Осьова ФРТ трифокальної ДЛ, яка забезпечує додаткову оптичну силу в 2 дптр

На рис. 5.37 наведено радіальний профіль ДЛ, який визначається функцією (5.175), коли $p_{base} = 0$, $a = 1,724 \text{ мм}^{-2}$, $b = 0,127$, $R_p = 3,5 \text{ мм}$.

Для профілю (5.175) було досліджено вплив діаметра діаметру $2R_p$ вхідної зіниці ДЛ на розподіл інтенсивності в ФРТ. На рис. 5.38 наведена осьова ФРТ трифокальної ДЛ для трьох діаметрів вхідної зіниці 7, 5 і 3 мм. Положення фокусів і відносна висота ФРТ залишаються незмінними, так як вони визначаються параметрами a і b . Але ФРТ розширюється, коли діаметр вхідної зіниці зменшується.

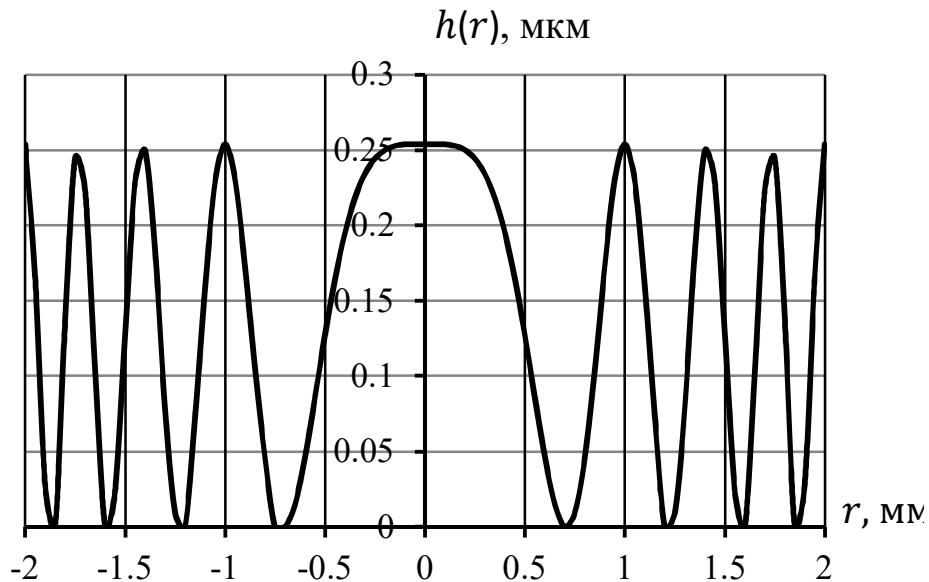


Рис. 5.37. Радіальний профіль трифокальної ДЛ

Для формування трьох окремих фокусів необхідно як мінімум два періоди косинусного профілю. Із рівняння (5.174) знаходимо мінімальний радіус вхідної зіниці $R_{p,min} = \sqrt{2/a}$. У випадку трифокальної ДЛ з 2-х діоптрійною додатковою оптичною силою, мінімальний діаметр вхідної зіниці становить 2 мм, що менше діаметра зіниці ока в денних умовах.

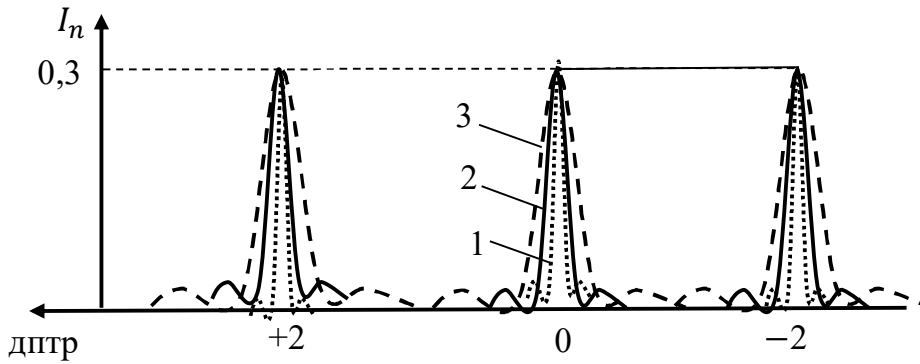


Рис. 5.38. Осьова ФРТ трифокальної ДЛ. Нормування здійснюється ФРТ ока без ДЛ з відповідними діаметрами входної зіниці $2R_p$: 1 – 7 мм; 2 – 5 мм; 3 – 3 мм

Відстанню між фокусами можна керувати за допомогою параметра a , так як координати фокусів визначаються співвідношенням $u_f = 0, \pm 2\lambda R_p^2 a$. Використовуючи формулу (5.177) можна встановити зв'язок між параметром a і додатковою оптичною силою p_a :

$$a = \frac{p_a}{2\lambda(1+ap_a)} \cong \frac{p_a}{2\lambda}. \quad (5.178)$$

На рис. 5.39 наведені осьові ФРТ лінзи з додатковою оптичною силою $p_a = 2$ дптр і $p_{base} = 2$ дптр ($a = 1,724 \text{ мм}^{-2}$, $b = 0,127$, $R_p = 3,5$ мм). Таку ДЛ лінзу можна використовувати в якості штучного кришталіка, який забезпечує діапазон фокусування в 4 діоптрії з чітким баченням в нескінченності ($p_a = 0$ дптр), 50 см ($p_a = +2$ дптр) і 25 см ($p_a = +4$ дптр).

В трифокальній ДЛ розподіл світлової енергії між фокусами (відносна висота максимумів ФРТ) визначається параметром b . Рівність інтенсивності у фокусах досягається за умови $|J_0(kb)| = |J_1(kb)|$, де J_0 і J_1 – функції Бесселя нульового і першого порядку відповідно.

Трифокальна ДЛ забезпечує чітке бачення об'єктів на дальній, середній і ближній відстані. В той же час, коли один фокус формує на сітківці чітке зображення об'єкта, два інші фокуси формують «розмиті» (розфокусовані) зображення. Все це призводить до зменшення контрасту зображення, яке сприймає око людини.

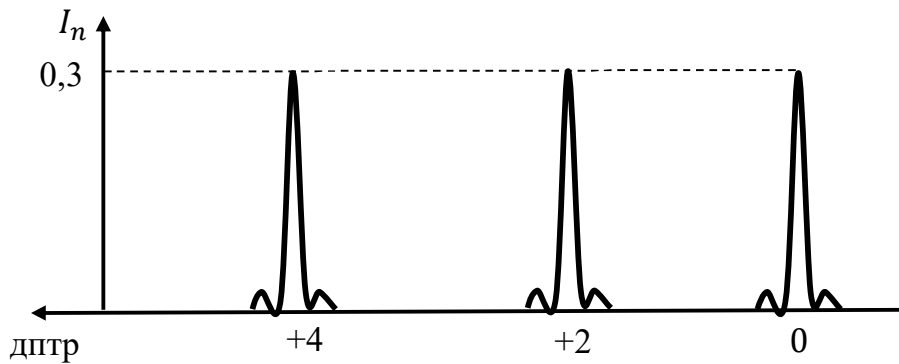


Рис. 5.39. Осьова ФРТ трифокальної ДЛ

До сих пір ми розглядали мультифокальну ДЛ, яка була розрахована для монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,555$ мкм, що відповідає максимальній чутливості ока. Дифракційний принцип функціонування лінзи призводить до залежності її оптичних характеристик від довжини хвилі. При заданих розрахункових параметрах a і b , відстань між фокусами і розподіл в них світлової енергії залежать від довжини хвилі, тобто виникають повздовжні хроматичні аберації. На рис. 5.40 наведені осьові ФРТ для трьох довжин хвиль, які наближено відповідають максимумам чутливості трьох типів ковбочок сітківки ока (0,45 мкм – синій, 0,54 мкм – зелений і 0,58 мкм – жовто-червоний кольори). Середній фокус (2 дптр) не змінює свого положення, так як він формується нульовим порядком дифракції, який не залежить від довжини хвилі. Бокові фокуси зміщені на 0,5 дптр аберації між синім та червоним кольорами, і мають протилежні знаки для ближнього і дальнього зору. Короткозоре фокусування має хроматичні аберації протилежні хроматичним абераціям ока людини. Природні аберації ока між 0,45 мкм і 0,58 мкм становлять близько 1 дптр, тому вони частково компенсуються для короткозорого фокуса.

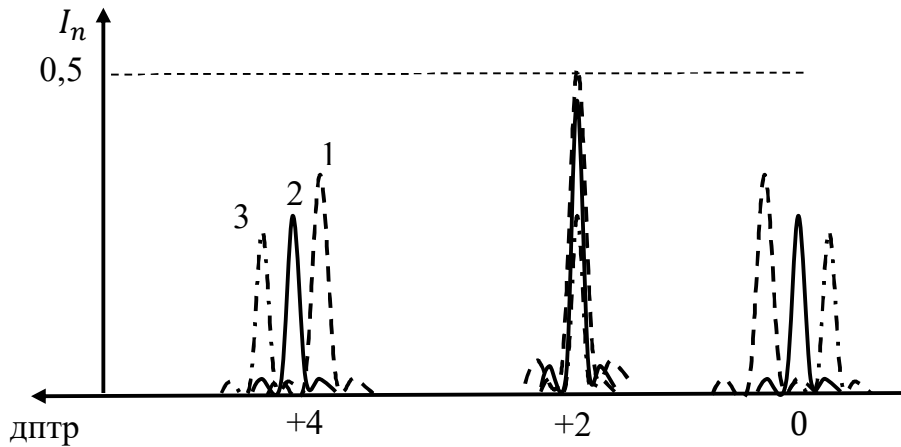


Рис. 5.40. Осьова ФТР три фокальної ДЛ ($a = 1,724 \text{ мм}^{-2}$, $h_0 = 0,104 \text{ мкм}$, $p_{base} = 2 \text{ дптр}$ і $R_p = 3,5 \text{ мм}$) для довжин хвиль: 1 – $\lambda = 0,45 \text{ мкм}$, 2 – $\lambda = 0,54 \text{ мкм}$, 3 – $\lambda = 0,58 \text{ мкм}$

Таким чином, оптичні характеристики трифокальної ДЛ визначаються фазовим профілем лінзи (частотою і амплітудою). Додаткова світлосила і розподіл світла між фокусами просто і незалежно керується параметрами мікропрофілю a і b відповідно. Крім того, оптичні характеристики ДЛ не залежать від змінного діаметра зіниці ока. Наведені результати можна застосовувати при проектуванні іншого виду дифракційно-рефракційної мультифокальної контактної або інтраокулярної лінзи.

5.7. Аберації дифракційних лінз

Перші дослідження абераційних властивостей дифракційних лінз робилися, зазвичай, шляхом порівняння оптичного шляху або еквівалентної різниці фаз між точкою об'єкта і відповідною точкою зображення [27]. Були отримані результати для деяких випадків зонних пластинок з урахуванням розмірів пластинок (апертури).

Як відзначалось в підрозділі 5.3, ДЛ математично еквівалентна тонкій лінзі з нескінченно великим показником заломлення. Тому найбільш поширений метод отримання коефіцієнтів аберацій ґрунтується на розгляді ДЛ як рефракційної лінзи з великим показником заломлення [27]. Це дозволяє застосовувати геометричну оптику до аналізу аберацій ДЛ. Але при цьому не враховується той факт, що дифракція на мікроструктурі поверхні

лінзи створює багато порядків. Крім того, на суми Зейделя впливає форма дифракційної поверхні та положення вхідної зіниці.

Зони Френеля ДЛ (повний період) визначаються у площині xu , перпендикулярній до оптичної осі таким чином, що довжина оптичного шляху від краю q -ої зони до фокуса дорівнює $f + q\lambda_0$, де f – фокусна відстань за умови, коли об’єкти знаходяться в нескінченності. За таких умов радіус q -ої зони згідно (5.36) дорівнює:

$$R_q = \sqrt{2q\lambda_0 f + (q\lambda_0)^2}, \quad (5.179)$$

де λ_0 – довжина хвилі, для якої розраховується ДЛ.

Для параксіальної області маємо:

$$R_q = \sqrt{2q\lambda_0 f}. \quad (5.180)$$

Спочатку розглянемо випадок, коли вхідна апертура (зіниця) співпадає з плоскою ДЛ. За таких умов хвильова аберація третього порядку описується функцією

$$W(h, \rho, \cos\varphi) = \frac{1}{8}S_I\rho^4 + \frac{1}{2}S_{II}h\rho^3\cos\varphi + \\ + \frac{1}{2}S_{III}h^2\rho^2\cos^2\varphi + \frac{1}{4}(S_{III} + S_{IV})h^2\rho^2 + \frac{1}{2}S_Vh^3\rho\cos\varphi, \quad (5.181)$$

де h – нормована відносно фокусної відстані висота об’єкта; ρ і φ – полярні координати у вхідній зіниці (ρ – нормована радіальна координата). Суми Зейделя $S_I - S_V$ для тонкої лінзи наведені нижче:

- сферична аберація

$$S_I = \frac{y^4\Phi^3}{4} \left[\left(\frac{n}{n-1} \right)^2 + \frac{n+2}{n(n-1)^2} B^2 + \frac{4(n+1)}{n(n-1)} BT + \frac{3n+2}{n} T^2 \right] + 8Gy^4(\Delta n); \quad (5.182)$$

- кома $S_{II} = \frac{-y^2\Phi^2H}{2} \left[\frac{n+1}{n(n-1)} B + \frac{2n+1}{n} T \right]; \quad (5.183)$

- астигматизм $S_{III} = H^2\Phi; \quad (5.184)$

- поверхня Пецваля $S_{IV} = \frac{H^2\Phi}{n}; \quad (5.185)$

- дисторсія $S_V = 0. \quad (5.186)$

В рівняннях (5.182) – (5.186): n – показник заломлення лінзи; y – висота крайнього променя у вхідній зіниці; $\Phi = (c_1 - c_2)(n - 1)$ – оптична сила

лінзи ($c_1 = 1/R_1$ і $c_2 = 1/R_2$ – кривизна поверхонь лінз); $H = -\sigma'y$ – інваріант Лагранжа; G – деформація асферичної поверхні четвертого порядку (якщо одна або дві поверхні лінзи асферичні); Δn – зміна показника заломлення при проходженні променів через асферичну поверхню;

$$B = \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}; T = \frac{\sigma + \sigma'}{\sigma - \sigma'}; G = \frac{n^2(\lambda_0)}{8f^3[n(\lambda_0) - 1]^3}, \quad (5.187)$$

де σ і σ' – апертурні кути на вході і виході тонкої лінзи (рис. 5.41).

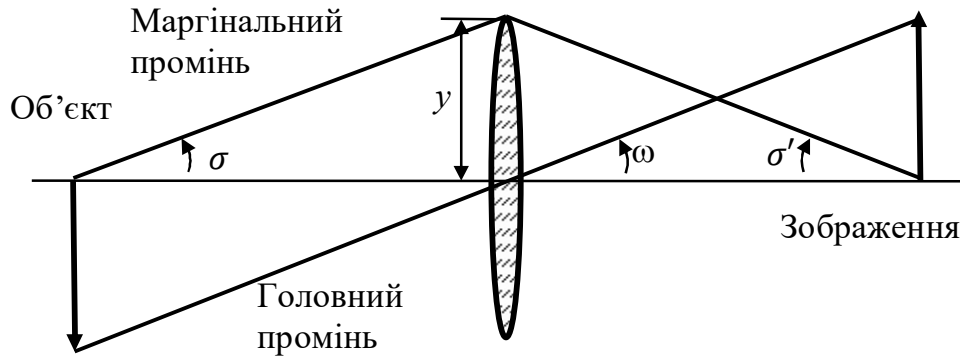


Рис. 5.41. Параксіальні величини для тонкої лінзи

Суми Зейделя для дифракційної лінзи можна отримати із формул (5.182) – (5.186), якщо $n \rightarrow \infty$. Для параксіальної ДЛ, зони якої визначаються рівнянням (5.180), асферичний коефіцієнт G дорівнює нулю, що обґрунтовано в статті [28]. Для випадку, коли об'єкт розташований у нескінченності, параметр T дорівнює одиниці. Таким чином, суми Зейделя для плоскої дифракційної лінзи, коли об'єкт розташований у нескінченності, а апертурна діафрагма співпадає з лінзою, мають вигляд:

$$S_I = \frac{y^4}{f^3} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^3; S_{II} = \frac{-y^3 \sigma'}{f^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2; S_{III} = \frac{y^2 \sigma'^2}{f} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right); S_{IV} = S_V = 0. \quad (5.188)$$

В рівняннях (5.188) приймається до уваги тільки перший порядок дифракції, а оптична сила визначається як

$$\Phi = \frac{\lambda}{\lambda_0} \Phi_0 = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{f}, \quad (5.189)$$

де f – фокусна відстань лінзи при $\lambda = \lambda_0$. З урахуванням (5.189) повна перша сума Зейделя має вигляд:

$$S_I = \frac{y^4}{f^3} \left(\frac{\lambda^3 - \lambda \lambda_0^2}{\lambda_0^3} \right). \quad (5.190)$$

Із цього рівняння випливає, що при $\lambda = \lambda_0$ сферична аберація в ДЛ відсутня.

Розглянемо тепер суми Зейделя у випадку, коли апертурна діафрагма знаходиться на відстані t від ДЛ:

$$S_I^* = S_I; \quad (5.191)$$

$$S_{II}^* = S_{II} + \frac{\bar{y}}{y} S_I; \quad (5.192)$$

$$S_{III}^* = S_{III} + 2 \frac{\bar{y}}{y} S_I + \left(\frac{\bar{y}}{y} \right)^2 S_I; \quad (5.193)$$

$$S_{IV}^* = S_{IV}; \quad (5.194)$$

$$S_V^* = S_V + \frac{\bar{y}}{y} (3S_{III} + S_{IV}) + 3 \left(\frac{\bar{y}}{y} \right)^2 S_{II} + \left(\frac{\bar{y}}{y} \right)^3. \quad (5.195)$$

Для монохроматичних аберацій $\lambda = \lambda_0$ і параксіальної області зміна висоти променя на лінзі, коли апертурна діафрагма знаходиться на відстані t від ДЛ, дорівнює $\bar{y} = t\omega$ (рис. 5.42). Тоді з урахуванням сум Зейделя (5.188) рівняння (5.191) – (5.195) матимуть вигляд:

$$S_I^* = \frac{y^4}{f^3}; \quad (5.196)$$

$$S_{II}^* = \frac{y^3 \omega (t-f)}{f^3}; \quad (5.197)$$

$$S_{III}^* = \frac{y^2 \omega^2 (t-f)^2}{f^3}; \quad (5.198)$$

$$S_{IV}^* = 0; \quad (5.199)$$

$$S_V^* = \frac{y \omega^3 t (3f^2 - 3tf + t^2)}{f^3}. \quad (5.200)$$

Для інших довжин хвиль значення фокусної відстані f в рівняннях (5.196) – (5.200) необхідно замінити на значення $(\lambda_0/\lambda)f$.

Із рівнянь (5.197) і (5.198) випливає важливий результат, що коли апертурна діафрагма розташована в передній фокальній площині (телецентричний хід променів), тобто $t = f$, кома і астигматизм третього порядку відсутні (рис. 5.42). Аберація поверхні Пецваля також дорівнює нулю, оскільки тангенціальні і сагітальні поля є плоскими. Звичайна лінза

має плоске поле зору тільки в меридіональному перерізі. Оскільки залишилась сферична аберація третього порядку, яка обмежує відносний отвір ДЛ, аберації вищих порядків надзвичайно малі у порівнянні абераціями Зейделя. Таким чином, аберації третього порядку для такої телецентричної параксіальної лінзи мають вигляд:

$$S_I^* = \frac{y^4}{f^3}; \quad (5.201)$$

$$S_{II}^* = S_{III}^* = S_{IV}^* = 0; \quad (5.202)$$

$$S_V^* = y\omega^3. \quad (5.203)$$

Рівняння (5.202) показують, що для такої системи польові аберації кома, астигматизм і кривизна поля дорівнюють нулю. Це дає можливість створювати зображення незмінної якості по всьому полю зору. Така окрема ДЛ є ізопланарною і формує плоске зображення на відміну від традиційних об'єктивів. Це є важливим для оптичних систем, що працюють з плоскими матричними приймачами випромінювання, або виконують двовимірне перетворення Фур'є в когерентних системах обробки інформації (див. розділ 6).

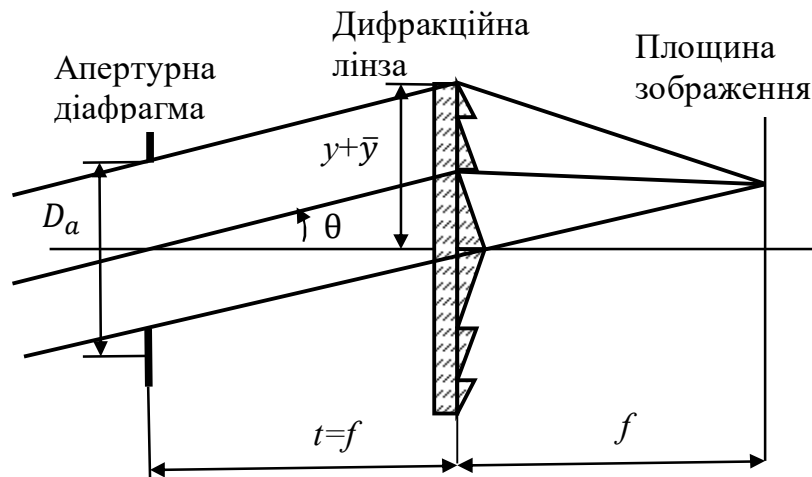


Рис. 5.42. Схема телецентричної параксіальної ДЛ, коли апертурна діафрагма розташована в передній фокальній площині

Поле зору телецентричної ДЛ обмежене діаметром лінзи D_l . Щоб уникнути він'єтування повинна виконуватись умова (рис. 5.42):

$$y + \bar{y} = y + f \operatorname{tg} \theta \leq D_l/2. \quad (5.204)$$

Із останнього співвідношення знайдемо найбільше значення кута θ_{max} , при якому вінетування в системі відсутнє:

$$\theta_{max} = \arctg\left(\frac{D_l}{2f} - \frac{y}{f}\right) = \arctg\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_s}\right)\right], \quad (5.205)$$

де $k_l = f/D_l$ і $k_s = f/2y$ – діафрагмові числа лінзи і оптичної системи. Наприклад, для сучасної ДЛ $D_l/f = 1/2$ і для діафрагмового числа оптичної системи $k_s = 5,6$ максимальне значення кута θ_{max} згідно (5.205) становить 9° .

Кількість зон Френеля і їх геометричні параметри залежать від довжини хвилі. Наприклад, ДЛ з фокусною відстанню $f = 50$ мм і діафрагмовим числом $k_l = 2$ має 2659 зон для довжини хвилі $0,58756$ мкм і лише 156 зон для довжини хвилі 10 мкм. Цей факт значно полегшує виготовлення дифракційних лінз, які використовуються в тепловізорах. Плоске поле зору ДЛ дає можливість використовувати такі лінзи спільно з плоскою фокальною матрицею приймачів випромінювання.

5.8. Ефективність і модуляційна передавальна функція дифракційної біфокальної лінзи

Профіль дифракційної біфокальної лінзи може бути різним: бінарним або неперервним (параболічний, синусоїдальний, трикутний та інший). Форма профілю визначає оптичні властивості ДЛ, зокрема, фокусну відстань, ефективність, МПФ і хроматизм. В цьому підрозділі будемо розглядати тонку плоску ДЛ, яка формує два фокуса дифракційним профілем. Така лінза формує два зображення для ближнього і дальнього зображення.

В статті [29] розглядаються ДЛ діаметром 3 мм з різницею оптичних сил $+3D$ для ближнього і дальнього зображень, що відповідає фокусній відстані 333 мм. Радіуси кільцевих зон Френеля залежать від фокусної відстані ДЛ і визначаються як:

- для бінарного профілю

$$R_q = \sqrt{f\lambda q}; \quad (5.206)$$

- для неперервного профілю

$$R_q = \sqrt{2f\lambda q}, \quad (5.207)$$

де q – номер зони. В формулі (5.206) q – непарне число.

Таким чином, для довжини хвилі $\lambda = 0,55$ мкм ДЛ з неперервним профілем містить 6 зон Френеля, а з бінарним профілем – 6 зон з нульовою фазою і 6 зон з фазою рівною π . Максимальна висота кожної канавки визначається за формулою (5.168) як

$$h_{max} = \frac{0,5\lambda}{(n_l - n_w)}, \quad (5.208)$$

де n_l і n_w – показники заломлення матеріалу лінзи і водянистої рідини відповідно. Для отримання однакової ефективності в ближньому і дальньому фокусах при синусоїдальному профілі максимальна висота канавки визначається як

$$h_{max} = \frac{0,415\lambda}{(n_l - n_w)}. \quad (5.209)$$

Розглянемо три профілі мікроструктури ДЛ: бінарний, параболічний і синусоїдальний (рис. 5.43). Дифракційні профілі таких лінз описуються функціями:

- для бінарного профілю

$$h(r) = \begin{cases} h_{max}, & \text{коли } r_q < r < r_{q+1}; \\ 0, & \text{коли } r_{q+1} < r < r_{q+2}; \end{cases} \quad (5.210)$$

- для параболічного профілю

$$h(r) = h_{max}q - h_{max}\frac{r^2}{r_1^2}, \quad q \in N, \quad (5.211)$$

де q – номер зони; N – кількість зон в межах апертури лінзи; r_1 – радіус першої зони;

- для синусоїдального профілю

$$h(r) = \frac{1}{2} h_{max} \left[1 - (-1)^q \cos \left(\pi \frac{r^2}{r_1^2} \right) \right]. \quad (5.212)$$

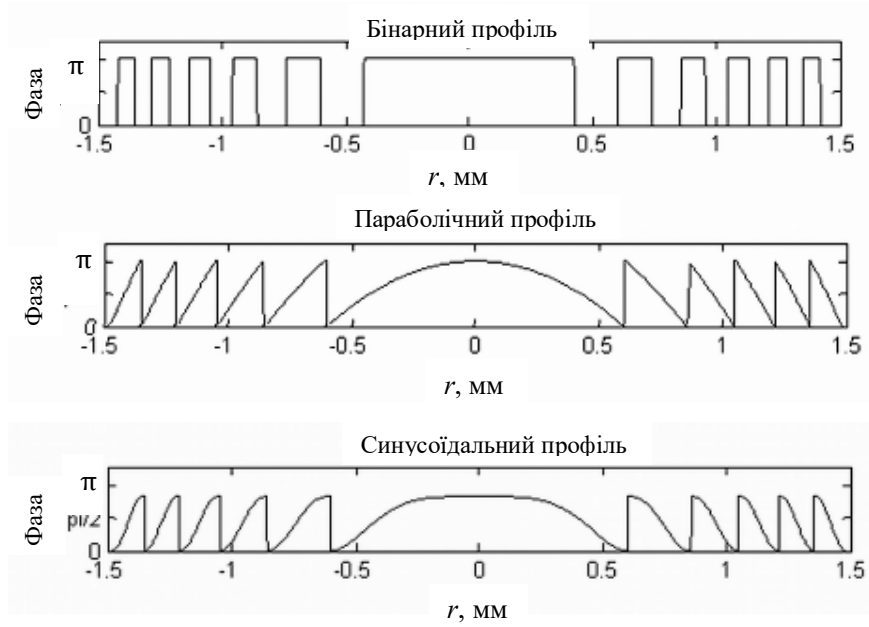


Рис. 5.43. Профілі мікроструктури дифракційних біфокальних лінз

Дифракційна ефективність може бути розрахована за допомогою перетворення Фур'є. Амплітудний коефіцієнт пропускання ДЛ визначається за формулою (5.101)

$$t_l(r) = \exp[j\varphi_l(r)], \quad (5.213)$$

де $\varphi_l(r) = \frac{2\pi}{\lambda} h(r)$ – фазова функція лінзи, яка має період r_1 в r – квадратичному просторі. Тому функцію $t_l(r)$ представимо у вигляді ряду Фур'є:

$$t_l(r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \exp\left(j2\pi n \frac{r^2}{r_1^2}\right), \quad (5.214)$$

де коефіцієнти C_n розкладу визначаються за формулою

$$C_n = \frac{1}{r_1^2} \int_0^{r_1^2} t_l(\sqrt{r}) \exp\left(-j2\pi n \frac{u^2}{r_1^2}\right) du. \quad (5.215)$$

В статті [29] наведені результати розрахунків МПФ ДЛ за допомогою програми Zemax®, коли для кожної зони розраховувалась МПФ, а потім розглядалась система «ДЛ – оптична система ока» для дальнього і ближнього бачення, як показано на рис. 5.44.

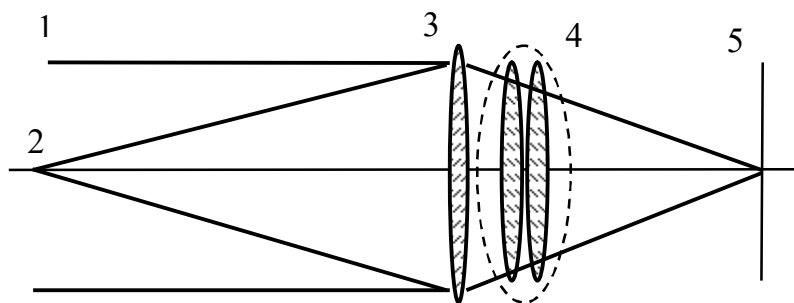


Рис. 5.44. Оптична схема розрахунку МПФ в програмі Zemax: 1 – для дальнього бачення; 2 – для ближнього бачення; 3 – дифракційна лінза; 4 – модель оптичної системи ока ($f = 16,9$ мм); 5 – фокальна площина ока

Отримані результати розрахунку МПФ представлені на рис. 5.45. Для усіх профілів ближня зона бачення забезпечує МПФ рівною 0,25 на просторові частоті 100 мм^{-1} .

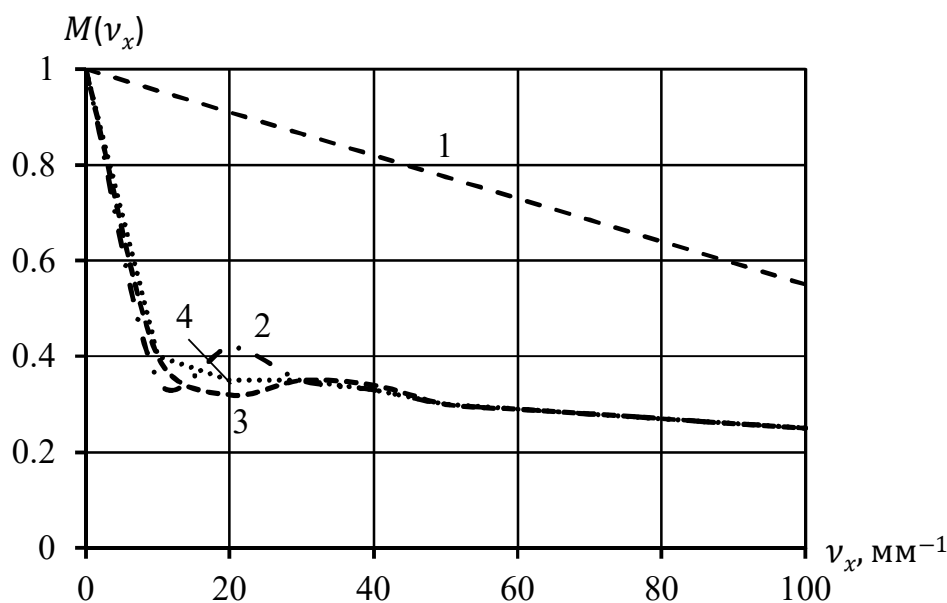


Рис. 5.45. Модуляційна передавальна функція ДЛ для ближнього бачення з різними дифракційними профілями:

1 – дифракційно обмежена; 2 – бінарний; 3 – синусоїдальний; 4 – параболічний

Розглянемо вплив хроматизму на якість зображення, яке формує ДЛ. Довжина хвилі визначає радіуси зон Френеля [формули (5.206), (5.207)] і максимальну висоту профілю [формула (5.208)]. Крім того, дисперсія показника заломлення $n(\lambda)$ матеріалу лінзи впливає на висоту мікрорельєфу. Однак дисперсія матеріалу $|d(\Delta n)/\Delta n|$ значно менша від $d\lambda/\lambda$ для видимій області спектру $d\lambda = 0,64 - 0,44$ мкм. Наприклад, для полікарбонату маємо:

$$\frac{d(\Delta n)}{\Delta n} = \frac{[n(0,64)-1]-[n(0,44)-1]}{n(0,55)-1} = \frac{1,581-1,610}{1,590-1} = -0,049;$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{0,64-0,44}{0,55} = 0,364.$$

Зміна радіуса і висоти канавки впливає на фокусну відстань (оптичну силу) лінзи, дифракційну ефективність і МПФ. В статті [29] наведені результати таких досліджень, які були проведені за допомогою перетворення Ханкеля і програми Zemax. Із формул (5.206) і (5.207) видно, що зміна довжини хвилі λ призводить до зміни фокусної відстані і, як наслідок, оптичної сили лінзи:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{\lambda_0} \lambda \Rightarrow \Delta\Phi = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Phi. \quad (5.216)$$

В табл. 5.2 наведені значення фокусної відстані і оптичної сили ДЛ в –1-му порядку дифракції, які є однаковими для усіх трьох профілів.

Таблиця 5.2

Значення фокусної відстані дифракційної лінзи для різних довжин хвиль

λ , нм	Фокусна відстань (мм) –1-й порядок	Оптична сила (діоптр.)
440	416	2.404
550	333	3.0
640	286	3.496

Таким чином, зміна оптичної сили у видимому діапазоні спектру становить $\Delta\Phi = \Phi_{red} - \Phi_{blue} = 3,469 - 2,404 = 1,09D$. Зміна $\Delta\Phi$ має додатне значення, що характерно для ДЛ. Необхідно також відзначити, що для дальнього бачення, яке забезпечується нульовим порядком, хроматизм відсутній. В свою чергу, для ближнього і дальнього бачення, які формуються –1-м і +1-м порядками дифракції, характерний значний хроматизм, що має протилежні знаки. Зміна довжини хвилі λ також впливає на ефективність і МПФ ДЛ. На рис. 5.46 наведено залежність дифракційної ефективності C_1 і C_{-1} від λ для різних профілів, яка була отримана за допомогою скалярної теорії дифракції. Зміна довжини хвилі світла λ також впливає на МПФ. Чим

більша дифракційна ефективність, тим кращою буде МПФ. Це обумовлено тим, що більш висока дифракційна ефективність призводить до зменшення розсіяного світла у високі порядки дифракцій, тобто сприяє збільшенню контрасту. На рис. 5.47 наведені МПФ для дальнього і ближнього бачення ДЛ з різними профілями для довжин хвиль $\lambda_{blue} = 0,44$ мкм і $\lambda_{red} = 0,64$ мкм.

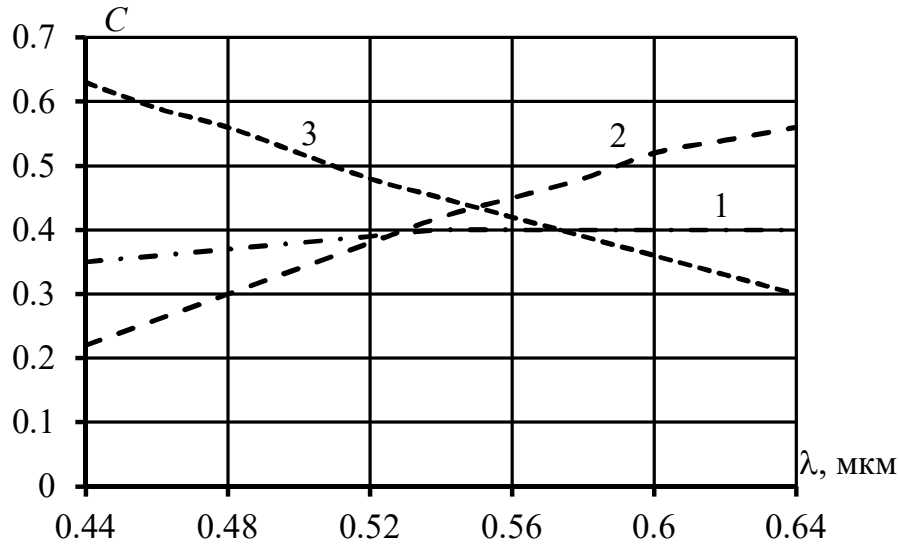
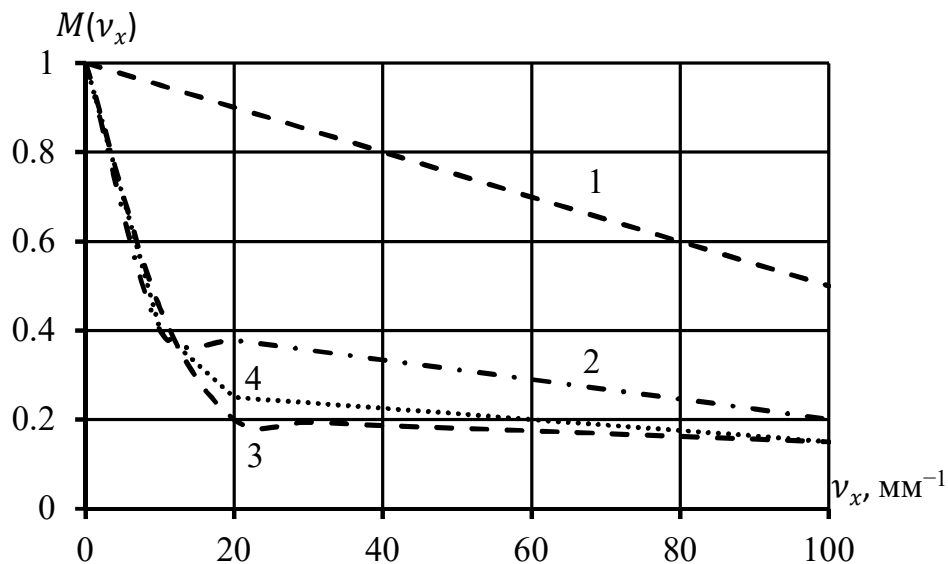
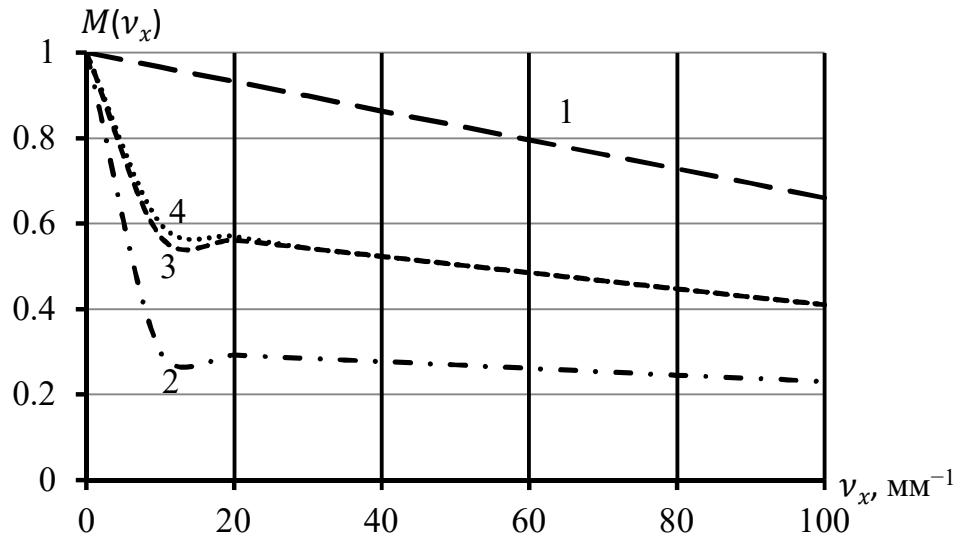


Рис. 5.46. Хроматизм ефективності ДЛ для різних профілів зон Френеля і порядків дифракції: 1 – бінарний +1; 2 – синусоїдальний +1; 3 – синусоїдальний -1



a)



б)

Рис. 5.47. Хроматизм модуляційної передавальної функції ДЛ для ближнього бачення з різними профілями: а – $\lambda_{red} = 0,64$ мкм ; б – $\lambda_{red} = 0,64$ мкм; 1 – дифракційно обмежена; 2 – бінарний; 3 – синусоїдальний; 4 – параболічний

5.9. Окулярні рефракційно-дифракційні лінзи

Збільшення поля зору окулярної лінзи можливе лише за умови виправлення її астигматизму. Відомо, що для додатних лінз, які мають сферичні поверхні, виконати цю умову можливо тільки тоді, коли оптичні сили лінз не перевищують 7 дптр. Однак афакічне око (без кришталика) потребує використання лінзи близько 10 дптр для того, щоб бачити віддалені предмети, і 16 дптр для читання.

Для створення додатної анастигматичної окулярної лінзи великої оптичної сили використовують лінзу, одна поверхня якої сферична, а друга – асферична. Вперше таку лінзу розрахував у 1911 р. шведський оптик і офтальмолог Гюльстранд; її виготовила німецька фірма «Карл Цейс» під назвою «катаральна» окулярна лінза Гюльстранда. Такі лінзи з великою оптичною силою мають значні хроматичні аберації, які призводять до утворення кольорових контурів у зображенні об'єкта спостереження.

Відомо, що дифракційний оптичний елемент має хроматизм із протилежним знаком відносно хроматизму звичайної лінзи (див. п. 5.1.3),

тому в разі поєднання такого елемента з лінзою можна не тільки виправити хроматизм, але зробити також корекцію астигматизму. Це дає змогу розрахувати рефракційно-дифракційну окулярну лінзу, аналогічну катаральній, яка не має хроматизму в межах поля зору ока.

Розглянемо метод розрахунку анастигматичної рефракційно-дифракційної ахроматичної окулярної лінзи, яка може мати два варіанти побудови оптичної схеми:

1. Дифракційна поверхня перебуває на поверхні лінзи, яка розміщена ближче до ока.
2. Дифракційна поверхня міститься на зовнішній поверхні лінзи.

Розглянемо перший варіант, схему якого зображено на рис. 5.48. На схемі меридіонального перерізу показано хід променя через гострий край рефракційно-дифракційної лінзи (РДЛ), де ДОЕ позначено штрих пунктирною лінією. У статті [30] наведено послідовність отримання формули для поздовжнього астигматизму для тонкої лінзи в області аберацій третього порядку. Вважається, що перша по ходу променя поверхня і поверхня ДОЕ – сферичні, а фазова функція ДОЕ задана двома коефіцієнтами:

$$\varphi_{doe}(y) = a_2 y^2 + a_4 y^4. \quad (5.217)$$

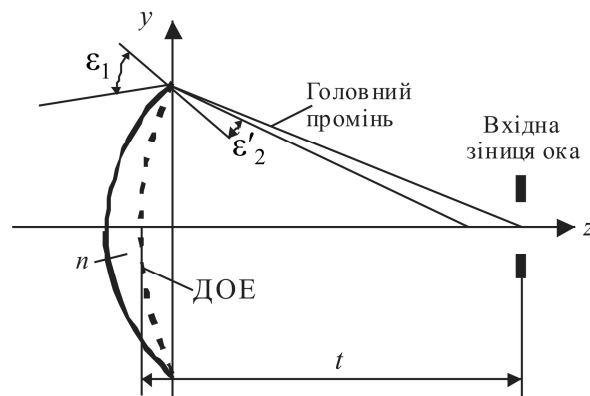


Рис. 5.48. Схема рефракційно-дифракційної лінзи, коли ДОЕ перебуває на другій сферичній поверхні

Закон заломлення променя в меридіональному перерізі ДОЕ на сферичній поверхні згідно зі статтею [30] можна подати у вигляді

$$n_2 \sin \varepsilon'_2 = n_1 \sin \varepsilon_1 + \frac{m\lambda}{\lambda_w} \left(1 - \frac{y}{r}\right) \frac{d\varphi_{doe}}{dy}, \quad (5.218)$$

де ε_1 і ε'_2 – кути падіння і заломлення відповідно; m – порядок дифракції; λ і λ_w – довжини світла під час формування зображення і запису ДОЕ відповідно; r – радіус поверхні ДОЕ.

Якщо окулярна лінза достатньо тонка, то виправлення хроматизму положення повинно одночасно привести до корекції поперечного хроматизму по полю зору. Використовуючи співвідношення (5.217) і (5.218), можна отримати формулу

$$\frac{1}{f'_\lambda} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - 2 \frac{m\lambda}{\lambda_w} a_2, \quad (5.219)$$

де n – показник заломлення матеріалу лінзи; r_1 і r_2 – додатні радіуси кривизни поверхонь лінзи.

Із формули (5.219) можна отримати умови ахроматизації РДЛ:

$$D = D_0 - 2m\lambda; D_0 = D \frac{v}{v + v_\lambda}; a_2 = -\frac{1}{2} \frac{D_0 v_\lambda}{m v}, \quad (5.220)$$

де v – коефіцієнт дисперсії матеріалу лінзи, $v = (n_{\lambda_0} - 1)/(n_{\lambda_2} - n_{\lambda_1})$; $v_\lambda = \lambda_0/(\lambda_1 - \lambda_2)$; D_0 – оптична сила рефракційної лінзи; D – оптична сила РДЛ.

Формули (5.220) дозволяють визначити оптичну силу РДЛ, рефракційної частини ахроматичної лінзи і перший коефіцієнт a_2 фазової функції ДОЕ. Ці формули завдяки симетрії оптичної системи залишаються справедливими і для варіанта РДЛ з передньою дифракційною поверхнею.

У статті [30] також наведено приклад розрахунку РДЛ з використанням Mathcad. Матеріалам для лінзи було обрано оптичну пластмасу поліметилметакрилат, параметри якого наведено в табл. 5.3, де t – положення вихідної зіниці лінзи або відстань від задньої поверхні лінзи до центру обертання очного яблука (рис. 5.48).

Довжина хвилі запису, за якої формувалась мікроструктура ДОЕ, становить $\lambda_0 = 589,3$ нм, а граничні довжини хвиль – $\lambda_1 = 656,28$ нм і $\lambda_2 = 486,13$ нм. Таким чином, ДОЕ має $v_\lambda = 3,4634$ і використовує перший порядок дифракції $m = +1$. Результати розрахунків

наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Оптичні параметри поліметилметакрилату

Параметр	Значення параметра		
λ , нм	656,28	589,30	486,13
n_λ	1,488	1,491	1,496
ν_λ	61,375		
D , дптр	10	16	
f' , мм	100	62,5	
t	0,25	0,40	
D_0	0,94626		

Щоб знайти реальні радіуси кривизни поверхонь лінзи, отримані під час розрахунку значень r_1 і r_2 , ці радіуси слід помножити на еквіваленту фокусну відстань $f' = 1000/D$ (D брати в діоптріях), а значення коефіцієнтів a_2 і a_4 фазової функції Φ_{doe} відповідно на $(f')^{-1}$ і $(f')^{-3}$. У табл. 5.4 наведено також значення N – кількості дифракційних зон, які розміщені на поверхні лінзи діаметром 40 мм; ΔR_{\min} – значення мінімальної ширини крайньої зони. Для такої РДЛ хроматичний астигматизм для кутового поля 40° становить 0,03 дптр.

Таблиця 5.4

Розрахункові конструктивні параметри РДЛ

Параметр	r_1 , мм	r_2 , мм	$a_2 \cdot 10^4$, мм ⁻¹	$a_4 \cdot 10^8$, мм ⁻³	N	ΔR_{\min} , мкм
Значення	26,14	52,68	-2,6708	15,70	134	103

Отже, додатну РДЛ із пластмаси можна використовувати для корекції зору людей, які мають велику далекозорість понад 7 дптр, де звичайні рефракційні лінзи не забезпечують якості зображення в межах великого поля зору. Такі лінзи також можна використати для корекції зору людей, в яких видалений кришталик ока і які мають протипоказання до встановлення штучного кришталика. Таким людям потрібні окулярні лінзи від 12 до 16 дптр,

які через великий хроматизм не можуть бути виготовлені у вигляді рефракційних лінз. Застосування у цьому випадку РДЛ для корекції зору дозволяє підвищити його гостроту і збільшити поле зору. На основі таких лінз можна виготовити біфокальні окулярні лінзи з доданою діоптрією. Необхідне при цьому збільшення оптичної сили на 4 дптр відносно 9,5 дптр може бути забезпечене перерозподілом половини енергії у п'ятий порядок дифракції ДОЕ.

У дифракційно-рефракційних ІОЛ є один недолік – у певних умовах навколо яскравого об'єкта (наприклад, лампи) іноді можна спостерігати ореоли. Це не обумовлено конструктивними недоліками ІОЛ, а є невід'ємною властивістю самого явища дифракції. Навколо центрального максимуму на головній осі є кільцеві максимуми меншої інтенсивності, які і проявляються таким чином. Найчастіше, пацієнти без великих проблем адаптуються до цієї невеликої завади.

5.10. Вимірювання оптичних характеристик дифракційних оптичних елементів

Відомості про якість зображення, побудованого оптичною системою, можуть бути отримані двома шляхами – прямим і непрямим способами.

Прямі способи оцінки якості зображення полягають в спостереженні тест-об'єкту, сформованого за допомогою досліджуваної системи в зоні зображення, і вимірюванні фотометричної структури цього зображення, тобто визначення функції розсіювання точки (ФРТ) або функції розсіювання лінії (ФРЛ). Функції розсіювання та пов'язані з ними оптична передавальна функція, модуляційна передавальна функція і функція концентрації енергії (ФКЕ) в зображенні точкового тест-об'єкту служать на практиці кількісними характеристиками якості зображення оптичної системи.

Непрямі способи оцінки якості зображення полягають у вимірюванні структури деформацій хвильового фронту на виході оптичної системи і наступному обчисленні на основі отриманої карти хвильового фронту.

Переваги непрямих методів полягають в тому, що вони дозволяють по відомій топографії відхилень фронту хвилі розрахувати більшість характеристик якості зображення, таких як МПФ або ФКЕ. Непрямі методи дають можливість визначити вплив конкретних спотворень хвильового фронту, що вносить система, на якість зображення.

Кінцева перевірка виготовлення ДОЕ полягає у вимірюванні його ефективності. Наприклад, можна вимірювати розподіл інтенсивності у зображенні точкового джерела випромінювання або у фокальній площині дифракційної лінзи. Необхідно також застосовувати додаткові методи вимірювання, які враховують інші ефекти, наприклад, зміну поляризації світла, що пройшло через ДОЕ. Існує значна кількість методів вимірювання оптичних характеристик дифракційних елементів. Розглянемо деякі із них.

Рефрактометри

В даному розумінні рефрактометри – це прилади, які вимірюють кількість світла на певній ділянці і світла, яке потрапило в інші місця. На рис. 5.49 наведена схема такого рефрактометра. Колімований пучок світла, сформований позаосьовим параболічним дзеркалом, проходить через досліджуваний елемент. Скануючий приймач випромінювання з точковою польовою діафрагмою виміряє розподіл освітленості у ближній або дальній зонах. Процес вимірювання контролюється комп'ютерною програмою LabView. Точність вимірювання залежить від розмірів польової діафрагми і кроку сканування приймачем.

В сучасних рефрактометрах замість скануючого ПВ часто використовують прилад з зарядовим зв'язком (ПЗЗ) у вигляді матриці. Це дозволяє вимірювати двовимірний розподіл освітленості у площині аналізу в реальному часі без використання механічного сканування. Електричний сигнал кожного пікселя матриці, який пропорційний освітленості цього пікселя, квантується по амплітуді і представляється у вигляді цілого числа, яке знаходиться в межах від нуля (нульова освітленість) до верхнього значення динамічного діапазону (зазвичай від 256 до 65536 або від 8 до 16

біт). Масив чисел використовується для реконструкції освітленості площини аналізу і дозволяє застосовувати комп'ютер для дослідження ДОЕ.

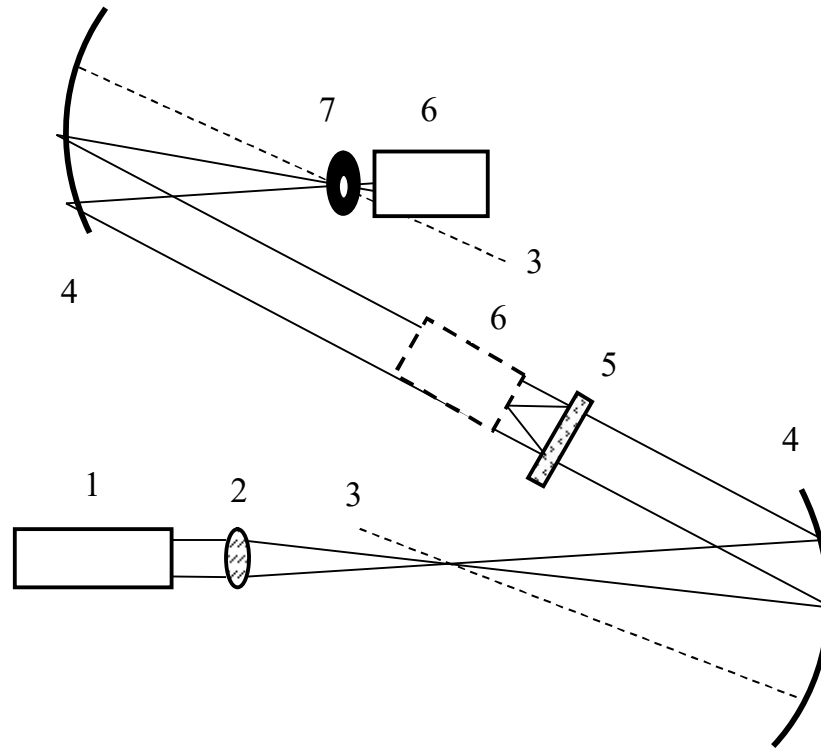


Рис. 5.49. Схема рефрактометра, призначеного для вимірювання освітленості, що сформована ДОЕ у ближній та дальній зонах: 1 – лазер; 2 – лінза; 3 – оптична вісь дзеркала; 4 – параболічне дзеркало; 5 – ДОЕ для тестування; 6 – скануючий ПВ; 7 – точкова діафрагма

При використанні ПЗЗ-матриць для вимірювання характеристик ДОЕ необхідно враховувати ряд факторів. Розмір матриці складає декілька міліметрів, що обмежує область вимірювання. Крім того, точність вимірювань обмежена розміром пікселя. Для підвищення точності вимірювань зображення із фокальної площини ДОЕ переноситься на матрицю із збільшенням за допомогою мікрооб'єктива. Необхідно також враховувати обмежений динамічний діапазон і спектральну чутливість ПЗЗ-матриці.

Схема установки для контролю ІОЛ [31].

Найважливішою характеристикою інтраокулярної лінзи є її оптична сила, яка відображає її здатність фокусувати зображення на сітківці ока. Вимірявши ефективну фокусну відстань (ЕФВ) зразка, можна розрахувати і

його силу. ЕФВ можна виміряти в повітрі або в місці використання моделі ока згідно з ISO 11979. Важливою складовою оцінки якості ІОЛ є аналіз оптичних аберацій, шляхом дослідження хвильового фронту. У результаті аналізу можна отримати інформацію про сферичну аберацію, кому, астигматизм, дефокусування і кривизну поля. Вимірювання хвильового фронту дає також можливість визначити відхилення від конструкції лінзи. Ще одним параметром, необхідним для характеристики ІОЛ, є МПФ. Вона може бути виміряна безпосередньо на основі аналізу функції розсіювання точки або лінії, або шляхом розрахунку його з вимірюваного хвильового фронту.

На рис. 5.50 наведена оптична установка, яка розроблена у відповідності з ISO 11979. Коліматор проектує зображення міри у безкінечність. Паралельний пучок проходить через ІОЛ і фокусується у фокальній площині. Зображення міри трансформується об'єктивом мікроскопа на ПЗЗ-матрицю цифрової камери з високою роздільною здатністю. У якості кріплення для лінзи використовується тримач, який розміщується на предметному столику. Обробка інформації виконується комп'ютером із відповідним програмним забезпеченням.

Схема установки для контролю ІОЛ [32]

У статті [32] описана установка для вимірювання фокусної відстані ІОЛ (рис. 5.51). Паралельний пучок від лазера 1 освітлює ІОЛ, яка знаходиться в кюветі з дистильованою водою. Фокусна відстань лінзи при цьому вимірюється за кюветою в повітрі, як різниця між положеннями мікроскопа, коли він сфокусований на поверхню лінзи і на сформоване зображення точкового джерела.

Перевагами цього методу є, по-перше, відсутність необхідності калібрування шкали, по-друге – форма розподілу інтенсивності в фокальній площині свідчить про наявність або відсутність сферичних, астигматичних та інших аберацій.

На рис. 5.52 представлена система для вимірювання дифракційної ефективності ІОЛ. У загальному випадку, ефективність залежить від форми і глибини профілю дифракційної структури, а також від втрат на відбиття, поглинання і розсіювання світла.

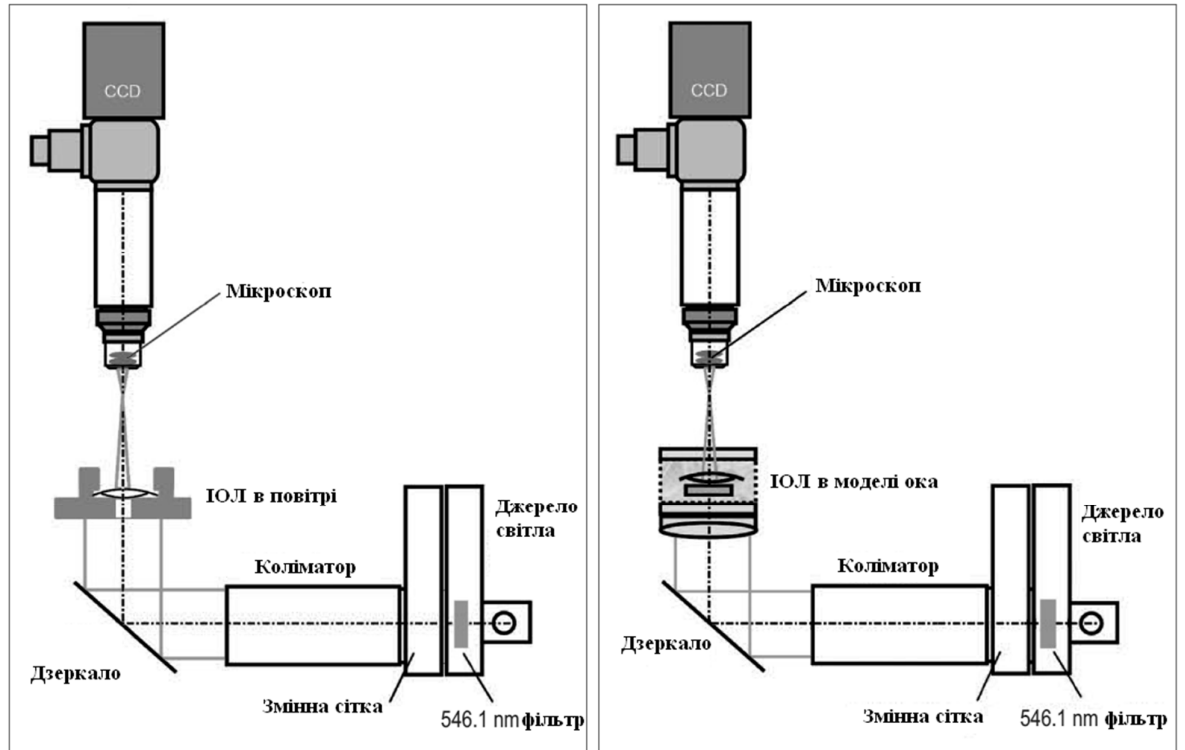


Рис. 5.50. Установка для тестування ІОЛ

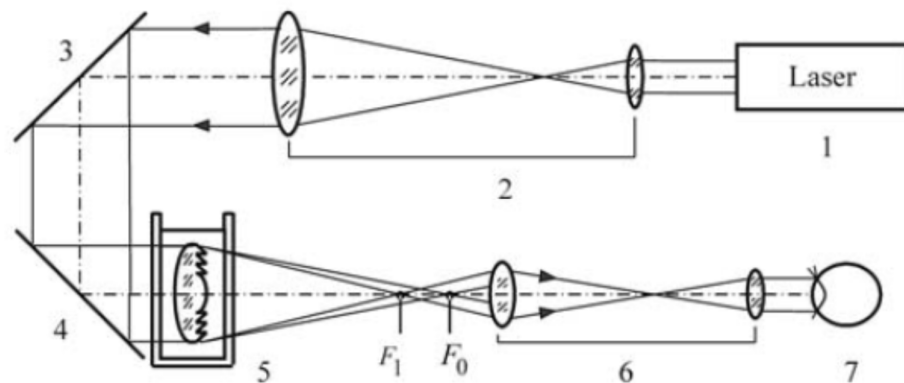


Рис. 5.51. Система для вимірювання фокусної відстані ІОЛ: 1 – лазер; 2 – коліматор; 3,4 – заломлюючі дзеркала; 5 – кювета наповнена дистильованою водою і ІОЛ; 6 – мікроскоп; 7 – око

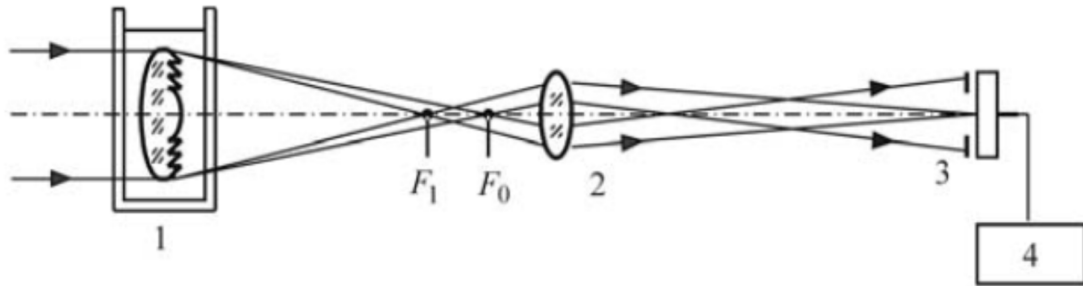


Рис. 5.52. Система для вимірювання дифракційної ефективності: 1 – кювета з дистильованою водою та ІОЛ; 2 – мікрооб’єктив; 3 – фотодіод з діафрагмою; 4 – мікрометр

Промислові прилади для вимірювання характеристик ІОЛ

Характеристики ДЛ мають бути визначені надзвичайно точно, адже подальше їхнє використання пов’язане зі здоров’ям людини. Для цього створені промислові прилади для вимірювання характеристик ІОЛ. Розглянемо деякі із них.

1) Image Master®VISION (рис. 5.53). Оцінює якість зображення офтальмологічних елементів за модуляційною передавальною функцією. Також є можливість для визначення функції розсіювання лінії, функції передачі фази, оптичної сили та астигматизму. Акомодація та адаптація людського ока можуть бути змодельовані за допомогою Image Master®VISION: вимірювальна головка фокусується для симуляції акомодації ока у діапазоні ± 10 дптр і змінюється апертура детектора для імітації адаптації ока.

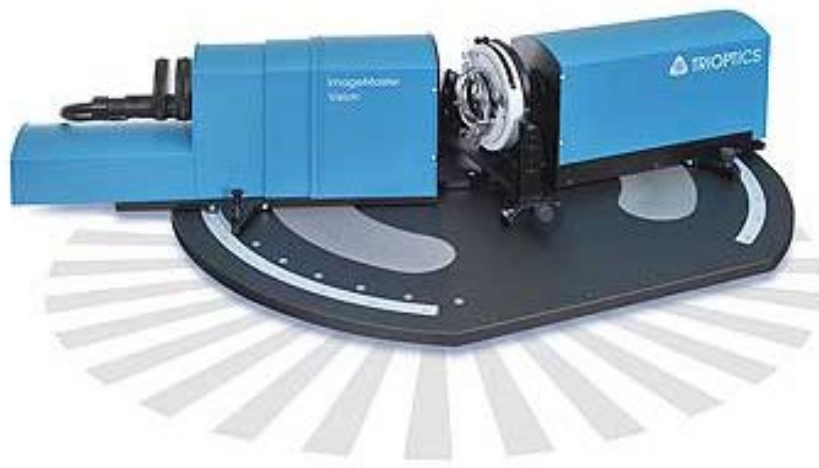


Рис. 5.53. Загальний вигляд приладу Image Master®VISION

- 2) OptiSpheric®IOL (рис. 5.54). Дозволяє вимірювати всі важливі характеристики ІОЛ у відповідності зі стандартом ISO 11979 для будь-якого типу інтраокулярних лінз – монофокальних, мультифокальних, торичних; з будь-яким типом структури – рефракційних, дифракційних. Прилад вимірює у повітрі чи в моделі ока: ефективну фокусну відстань, модуляційну передавальну функцію, функцію розсіювання точки, радіус кривизни та задню фокусну відстань.
- 3) PMTF™. Прилад для офтальмологічних цілей, розроблений фірмою Lambda-X, для вимірювання характеристик різних інтраокулярних лінз високої якості в режимі реального часу: оптичної сили і модуляційної передавальної функції.
- 4) IOLA Plus. Система цього приладу використовує унікальну технологію, яка дозволяє отримувати об'єктивні й точні виміри всіх типів рефракційних ІОЛ в повітрі та в спеціальному розчині. Прилад чітко показує форму профілю лінзи та найменші відхилення і дефекти лінзи, включаючи будь-які аберації.
- 5) Optikos IOL-5000 (рис. 5.55) призначений для вимірювання оптичних властивостей ІОЛ: модуляційної передавальної функції, ефективної фокусної відстані, функції розсіювання лінії та різних аберацій. Система аналізу зображення може тестувати як монофокальні так і мультифокальні ІОЛ та відповідає стандарту ISO 11979.

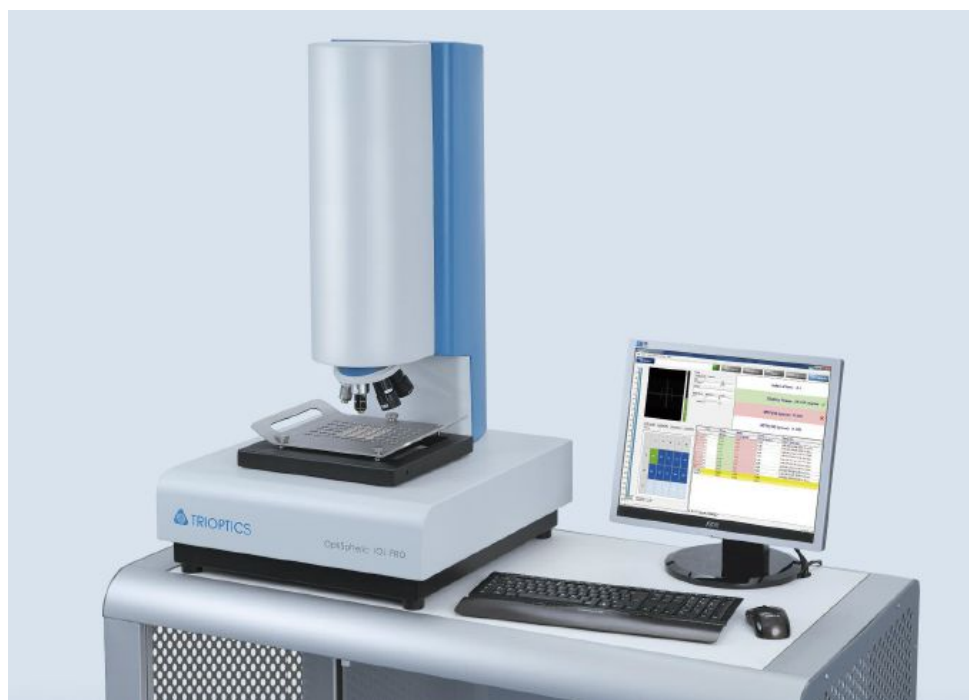


Рис. 5.54. Загальний вигляд приладу OptiSpheric®IOL

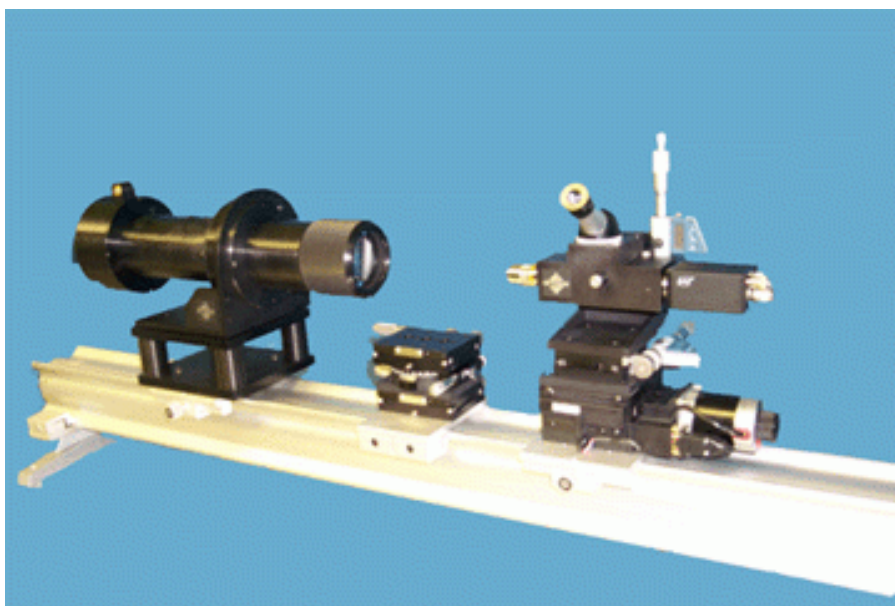


Рис. 5.55. Загальний вигляд приладу IOL-5000

Порівняти функціональні можливості вищерозглянутих приладів можна за допомогою табл. 5.5.

Промислові прилади для вимірювання характеристик ІОЛ

Виробник	Модель	Вимірюється
TRIOPTICS (Німеччина)	ImageMaster®VISION	МПФ, оптична сила, ФПФ, астигматизм.
	OptiSpheric®IOL	МПФ, ефективна фокусна відстань, задній фокальний відрізок, радіус кривизни.
LAMBDA-X (Бельгія)	PMTF™	МПФ, оптична сила для мультифокальних і торичних ІОЛ
Rotlex Optics (Ізраїль)	IOLA Plus	МПФ, форма профілю, дефекти, аберації.
Optikos (Великобританія)	IOL-5000	МПФ, оптична сила, ефективна фокусна відстань, кривизна поля, хроматичні аберації.

5.11. Приклади розрахунку параметрів дифракційних оптичних елементів

Приклад 5.1. Користуючись рівнянням (5.34), знайдіть величину ейконалу світлової хвилі, що поширюється між двома точками $AB = L = 1$ м, якщо між цими точками встановлено перпендикулярно відрізка AB плоскопаралельну скляну пластинку. Пластинка має товщину $d = 10$ мм і показник заломлення $n = 1,5$.

Розв'язання. Нехай світло поширюється вздовж осі x , яка збігається з відрізком AB (рис. 5.50). Тоді рівняння (5.34) матиме вигляд

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} = n(x).$$

Розв'язком цього диференціального рівняння є величина ейконалу

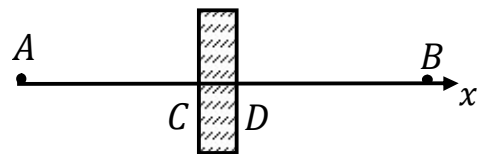


Рис. 5.50. До прикладу 5.1

$$\begin{aligned} \Psi(AB) &= \int_A^B n(x) dx = \int_A^C dx + n \int_C^D dx + \int_D^B dx = \\ &= (L - d) + nd = 1,015 \text{ м.} \end{aligned}$$

Приклад 5.2. На плоский кіноформний елемент (КЕ), виготовлений із германію, нормально падає монохроматична світло з довжиною хвилі $\lambda_0 = 10$ мкм і отримує фазову затримку $\varphi_{\lambda_0} = 2\pi$. Яку фазову затримку отримує світло з довжинами хвиль $\lambda_1 = 8$ мкм і $\lambda_2 = 12$ мкм?

Розв'язання. Фазова функція КЕ для розрахункової довжини хвилі λ_0 згідно формул (5.38) і (5.39) має вигляд:

$$\varphi_{\lambda_0}(r) = \frac{2\pi}{\lambda_0} OPD(r) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [n(\lambda_0) - 1]d(r),$$

де $OPD(r)$ – оптична різниця ходу (Optical Path Difference); $n(\lambda_0)$ – показник заломлення матеріалу лінзи для довжини хвилі λ_0 , для якої фазова затримка складає 2π ; $d(r) = d(x, y)$ – товщина лінзи у точці (x, y) .

Для довільної довжини хвилі фазова функція має вигляд

$$\varphi_{\lambda}(r) = \frac{2\pi}{\lambda} [n(\lambda) - 1]d(r).$$

Введемо поняття коефіцієнта фазової затримки КЕ

$$\alpha_{doe}(\lambda) = \frac{\varphi_{\lambda}(r)}{\varphi_{\lambda_0}(r)} = \frac{\lambda_0[n(\lambda)-1]}{\lambda[n(\lambda_0)-1]}.$$

В таблиці наведено значення показника заломлення германію для трьох довжин хвиль:

λ , мкм	8	10	12
$n(\lambda)$	4,0051	4,0032	4,0023

Оскільки показник заломлення германію для різних довжин хвиль майже однаковий, то для розрахунку можна скористатися спрощеним виразом для коефіцієнта $\alpha_{doe}(\lambda)$

$$\alpha_{doe}(\lambda) = \frac{\lambda_0}{\lambda}.$$

Результати розрахунків: $\alpha_{doe}(8) = 1,25$; $\alpha_{doe}(12) = 0,83$;
 $\varphi_8(r) = 2,5\pi$; $\varphi_{12}(r) = 1,67\pi$.

Приклад 5.3. Розрахуйте залежність положення фокусів під час дифракції світла на круглій апертурі в пучках, що сходяться, від радіуса апертури r_p .

Розв'язання. 1. Розглянемо рис. 5.12, на якому положення фокусів визначається формулою (5.64) для відрізків,

$$s_{+m} = \frac{f_0 f_{+m}}{f_0 + f_{+m}}; s_{-m} = \frac{f_0 f_{-m}}{f_0 + f_{-m}},$$

де фокусні відстані f_{+m} і f_{-m} знаходять за формулами (5.63):

$$f_{+m} = \frac{r_p^2}{m\lambda}; f_{-m} = -\frac{r_p^2}{m\lambda}.$$

2. Після підстановки формул (5.63) до функцій (5.64) маємо

$$s_{+m}(r_p) = \left[\left(\frac{r_p^2}{m\lambda} \right)^{-1} + f_0^{-1} \right]^{-1};$$

$$s_{-m}(r_p) = \left[\left(\frac{r_p^2}{m\lambda} \right)^{-1} - f_0^{-1} \right]^{-1}.$$

3. Графіки функцій $s_{+m}(r_p)$ і $s_{-m}(r_p)$ для лінзи з фокусною відстанню $f_0 = 20$ мм для довжини хвилі $\lambda = 0,55$ мкм зображено на рис. 5.13.

Приклад 5.4. Виведіть систему рівнянь (5.66) – (5.69).

Розв'язання. 1. Розглянемо оптичну схему, яка наведена на рис. 5.51.

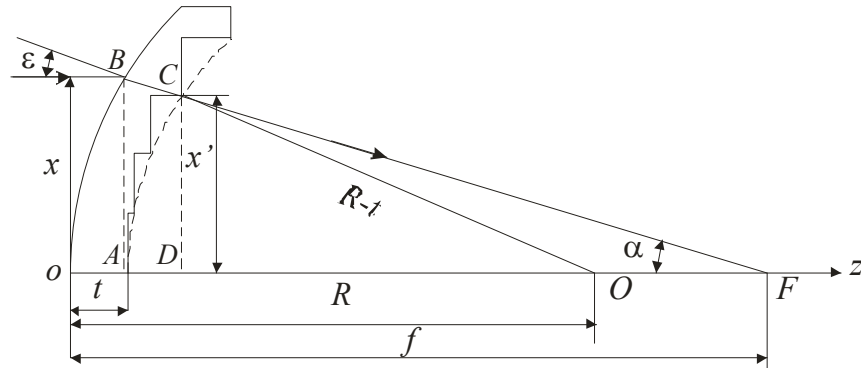


Рис. 5.51. До прикладу 5.4

1.1. Із трикутника ABO маємо:

$$\sin \varepsilon = \frac{AB}{AO} = \frac{x}{R}.$$

1.2. За законом Снелліуса

$$\sin \varepsilon = n \sin \varepsilon',$$

де ε і ε' – кути падіння і заломлення на першій поверхні лінзи; n – показник заломлення матеріалу лінзи.

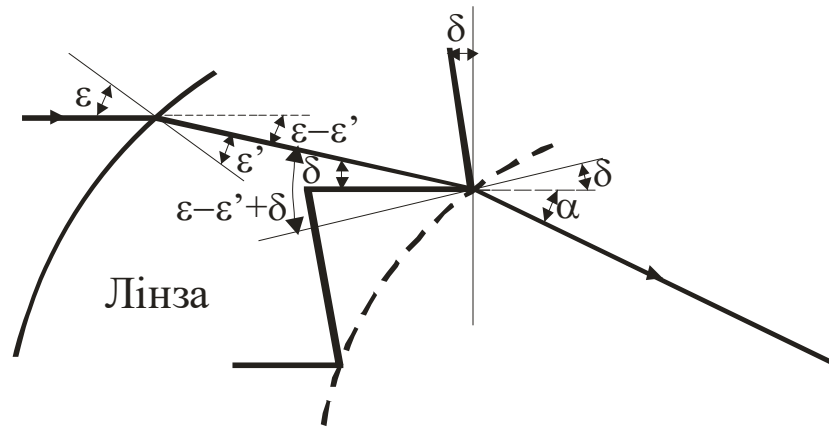


Рис. 5.52. До прикладу 5.4

1.3. Із трикутника CDF маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{CD}{DF} = \frac{CD}{oF - oD} = \frac{CD}{oF - (oO - DO)} = \\ &= \frac{CD}{oF - oO + \sqrt{CO^2 - CD^2}} = \frac{x'}{f - R + \sqrt{(R - t)^2 - x'^2}}, \end{aligned}$$

де R – радіус першої поверхні лінзи; f – фокусна відстань лінзи; t – товщина матеріалу корпусу (лінзи).

де R – радіус першої поверхні лінзи; f – фокусна відстань лінзи; t – товщина матеріалу корпусу (лінзи).

1.4. Із рис. 5.52 запишемо закон Снелліуса для променя, що вийшов із лінзи: $n \sin(\varepsilon - \varepsilon' + \delta) = \sin(\alpha + \delta)$.

Приклад 5.5. Розрахуйте методом геометричної оптики, який наведено в п.5.3.4, лінзу Френеля, що має такі параметри:

- фокусна відстань $f = 22$ мм;
- показник заломлення матеріалу лінзи, яка виготовлена із поліетилену високої щільності (HDPE – High Density Polyethylene) $n = 1,54$;
- ширина канавок $W_{st} = 0,5$ мм, яка обирається із технологічних міркувань;
- радіус кривизни поверхні корпусу $R = 22$ мм;
- товщина корпусу (лінзи) $t = 3$ мм.

Вважається, що лінза Френеля має канавки з плоскою основою.

Розв'язання. 1. Виходячи із рис. 5.14 визначаємо радіуси сферичних поверхонь лінзи із спільним центром O , який за умовою прикладу співпадає із фокусом лінзи F . Тоді радіуси кривизни кожної поверхні дорівнюють

$$R_1 = R = f' = 22 \text{ мм}; R_2 = R_1 - t = 19 \text{ мм}.$$

2. Запишемо рівняння першої і другої сферичної поверхні в системі координат zx

$$(z - 22)^2 + x^2 = 22^2; \quad (z - 22)^2 + x^2 = 19^2.$$

3. Координату вершини q -ої канавки знаходимо як

$$x'_q = qW_{st} = 0,5q.$$

4. Тангенс кута нахилу δ дна q -ої канавки визначимо за формулою (5.70). Для цього за формулою (5.73) визначаємо координату x_q на першій сферичній поверхні, яка відповідає вершині q -ої канавки x'_q на другій поверхні

$$x_q - t \frac{x_q}{R_1} + t \frac{x_q \sqrt{R_1^2 - x_q^2}}{R \sqrt{(nR_1)^2 - x_q^2}} = x'_q = qW_{st} = 0,5q.$$

В якості прикладу розглянемо канавку (зону Френеля) з номером $q = 10$. З урахування умови прикладу останнє рівняння запишеться у вигляді

$$x_{10} - 3 \frac{x_{10}}{22} + 3 \frac{x_{10} \sqrt{22^2 - x_{10}^2}}{22 \sqrt{(1,54 \cdot 22)^2 - x_{10}^2}} = 5.$$

Розв'язком цього рівняння є $x_{10} = 5,3$ мм.

5. Визначимо кути $\alpha(x')$, $\varepsilon(x)$ і $\varepsilon'(x)$ за формулами (5.67), (5.66) і (5.68) відповідно, які входять до рівняння (5.70):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{22 - 22 + \sqrt{(22 - 3)^2 - 5^2}} = 0,273 \rightarrow \alpha = 15,3^\circ;$$

$$\sin \varepsilon = \frac{x}{R} = \frac{5,3}{22} = 0,241 \rightarrow \varepsilon = 13,9^\circ;$$

$$\varepsilon' = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \varepsilon\right) = \arcsin\left(\frac{0,241}{1,54}\right) = 9,0^\circ.$$

6. Підставимо отримані значення кутів до формули (5.70)

$$\operatorname{tg} \delta(x, x') = \frac{\sin 15,3 - 1,54 \sin[13,9 - 9,0]}{1,54 \cos[13,9 - 9,0] - \cos 15,3} = \frac{0,264 - 1,54 \cdot 0,0854}{1,54 \cdot 0,996 - 0,965} = 0,233 \rightarrow \delta = 13,1^\circ.$$

7. Знайдемо рівняння дна канавки, яке утворене бічною поверхнею конуса. Розглянемо рис. 5.53, на якому наведено переріз ДЛ. Знайдемо рівняння прямої AB , яка утворює бічну поверхню конуса, що проходить через точку A з координатами (z_{10}, x_{10}) і має кут нахилу $\delta' = \frac{\pi}{2} + \delta = 103,1^\circ$.

$$x - x_{10} = \operatorname{tg} \delta' (z - z_{10}).$$

Координату z_{10} знайдемо із рівняння другої поверхні $(z - 22)^2 + x^2 = 19^2$:

$$z_{10} = 22 - \sqrt{19^2 - x_{10}^2} = 3,67.$$

Тоді рівняння прямої AB матиме вигляд

$$x - 5 = \operatorname{tg} 103,1 (z - 3,67).$$

Представимо це рівняння у вигляді

$$x = -4,3z + 20,8, \text{ коли } z_A \geq z \geq z_B;$$

$$z = -0,232x + 4,83, \text{ коли } 5 \leq x \leq 5,5.$$

Із останнього рівняння знаходимо координату z_B точки B : $z_B = 3,5$.

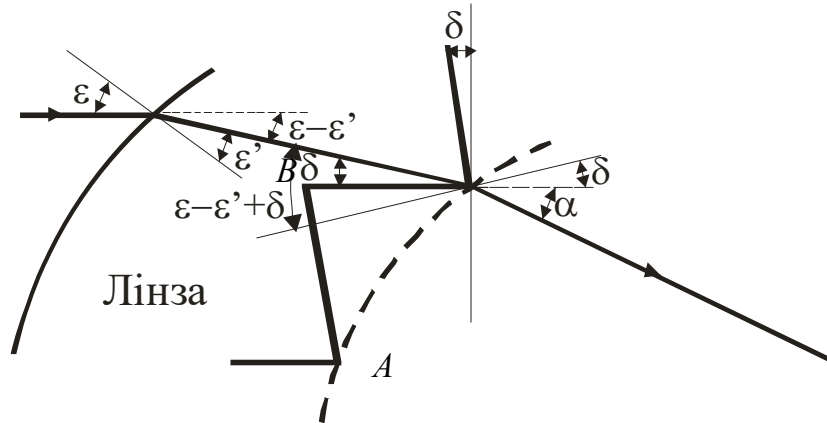


Рис.5.53. До прикладу 5.5

8. Таким чином, профіль канавки визначається відрізками AB і BC .
Відрізок BC паралельний оптичній осі зі описується рівнянням

$$x = 5,5, \text{ коли } z_C \geq z \geq z_B.$$

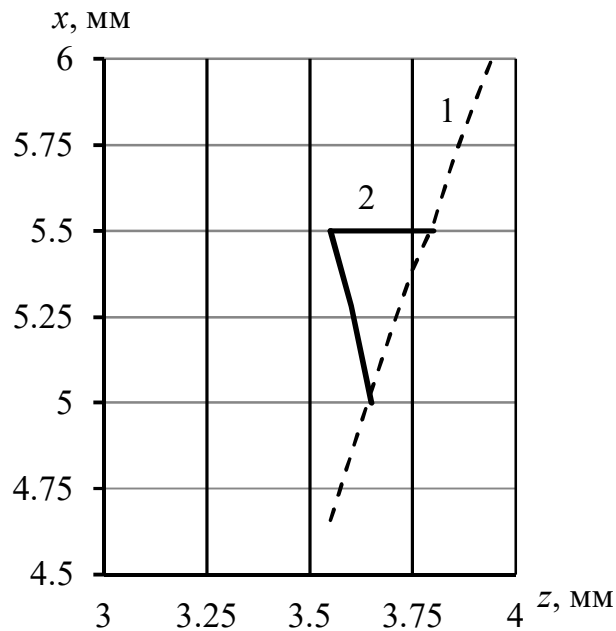


Рис.5.54. До прикладу 5.5: 1 – друга сферична поверхня лінзи;
2 – профіль 10-ї зони Френеля

Координату точки $z_C = z_{11}$ знайдемо із рівняння другої поверхні лінзи

$$z_{11} = 22 - \sqrt{19^2 - x_{11}^2} = 3,81.$$

На рис. 5.54 представлено профіль 10-ї канавки лінзи Френеля.

Приклад 5.6. Використовуючи загальні формули для аберацій сферичної лінзи (5.182) – (5.186) визначте ці суми для тонкої дифракційної лінзи, вважаючи, що її показник заломлення $n \rightarrow \infty$. Розгляньте випадок, коли об'єкт знаходиться в нескінченності. Порівняйте отримані функції з виразами (5.188).

Розв'язання. 1. Якщо об'єкт знаходиться в нескінченності, то для параксильної області у формулах (5.182) – (5.186) сум Зейделя тонкої ДЛ маємо: $\mathbf{G} = \mathbf{0}$; $\mathbf{T} = -\mathbf{1}$; $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

2. В цьому випадку формули (5.182) – (5.186) будуть мати вигляд:

$$S_I = \frac{y^4 \Phi^3}{4} \left[\left(\frac{n}{n-1} \right)^2 + \frac{3n+2}{n} \right]; S_{II} = \frac{-y^2 \Phi^2 H}{2} \left[-\frac{2n+1}{n} \right];$$

$$S_{III} = H^2 \Phi; S_{IV} = \frac{H^2 \Phi}{n} S_V = 0.$$

3. Розглянемо границю сум Зейделя, коли $n \rightarrow \infty$:

$$S_I = y^4 \Phi^3; S_{II} = y^2 \Phi^2 H; S_{III} = H^2 \Phi; S_{IV} = 0 S_V = 0.$$

4. Оптична сила дифракційної лінзи визначається за формулою

$$\Phi(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{f_0},$$

де f_0 – фокусна відстань ДЛ, яка розрахована для довжини хвилі λ_0 ; λ – робоча довжина хвилі. З урахуванням цього суми Зейделя матимуть вигляд:

$$S_I = \frac{y^4}{f_0^3} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^3; S_{II} = \frac{-y^3 \sigma'}{f_0^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2; S_{III} = \frac{y^2 \sigma'^2}{f_0} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right); S_{IV} = S_V = 0.$$

Приклад 5.7. Рефракційна лінза має такі конструктивні параметри: $r_1 = 100$ мм, $r_2 = \infty$, $D_p = 20$ мм, $d = 5$ мм, матеріал лінзи – скла ВК7 з числом Аббе $V_r = 64,2$. Для ахроматизації рефракційної лінзи на плоску поверхню наноситься ДЛ. Розрахуйте фокусну відстань ДЛ для видимої області спектру. Скільки зон Френеля розташовано на поверхні рефракційної лінзи?

Розв'язання. 1. Запишемо умову ахроматизації двокомпонентної оптичної системи:

$$\frac{\Phi_r}{\nu_r} = -\frac{\Phi_d}{\nu_d},$$

де Φ_r , Φ_d і ν_r , ν_d – оптичні сили і числа Аббе рефракційної і дифракційної лінз відповідно. Звідки

$$f_d = \frac{1}{\Phi_d} = -\frac{\nu_r}{\nu_d \Phi_r}.$$

Для скла BK7 $\nu_r = 64,2$. Із геометричної оптики знаходимо оптичну силу рефракційної лінзи [7]:

$$\Phi_r = (n - 1) \frac{1}{r_1} = (1,5168 - 1) \frac{1}{100} = 0,0051 \text{ мм}^{-1}.$$

Із п. 5.1.3 маємо, що число Аббе дифракційної лінзи для видимого діапазону розраховується за формулою

$$\nu_d = \frac{\lambda_d}{\lambda_F - \lambda_C} = \frac{0,587}{0,486 - 0,656} = -3,45.$$

Тоді

$$f_d = \frac{64,2}{3,45 \cdot 0,0051} = 3650 \text{ мм}.$$

2. Радіальне положення зон Френеля визначається за формулою (5.11), яку подамо у вигляді

$$R_q = D_p/2 = \sqrt{2\lambda_d f_d q}.$$

$$\text{Звідки } q = \frac{D_p^2}{8\lambda_d f_d} = \frac{20^2}{8 \cdot 0,587 \cdot 10^{-3} \cdot 3650} \approx 23.$$

Приклад 5.8. Для компенсації сферичної аберації плоско-випуклої лінзи, виготовленої із германію, плоску поверхню наносять дифракційну лінзу. Рефракційна лінза має такі параметри: фокусна відстань $f_r = 100$ мм, відносний отвір $D_p: f_r = 1:4$, сферична аберация $S_{1r} = 0,02272$. Розрахуйте параметри дифракційної лінзи f_0 і λ_0 , за яких дифракційно-рефракційна лінза має фокусну відстань $f = 50$ мм для довжини хвилі $\lambda = 10$ мкм і нульову сферичну аберацию.

Розв'язання. 1. Розглянемо формулу для сферичної аберації ДЛ (5.190), яку подамо у вигляді

$$S_{Id} = \frac{R_p^4}{f_0^3} \left(\frac{\lambda^3 - \lambda \lambda_0^2}{\lambda_0^3} \right),$$

де $R_p = \frac{D_p}{2} = \frac{f_r}{8} = 12,5$ мм – радіус вхідної апертури лінзи.

Із формули (5.189) визначаємо величину фокусної відстані ДЛ f_0 в залежності від довжини хвилі λ_0

$$f_0 = f \frac{\lambda}{\lambda_0}.$$

Тоді сферичної аберації ДЛ матиме вигляд

$$S_{Id} = \frac{R_p^4}{f^3} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^3 \left(\frac{\lambda^3 - \lambda \lambda_0^2}{\lambda_0^3} \right) = \frac{R_p^4}{f^3} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right).$$

Звідси

$$\lambda_0 = \lambda \sqrt{1 - \frac{S_{Id} f^3}{R_p^4}},$$

де $S_{Id} = -S_{1r} = -0,02272$.

Для визначення фокусної відстані ДЛ будемо розглядати дифракційно-рефракційну лінзу у вигляді рефракційної і дифракційної тонких лінз, оптична сила якої $\Phi_{dr} = \Phi_d + \Phi_r$. Тоді оптична сила ДЛ $\Phi_d = \Phi_{dr} - \Phi_r = = 1/50 - 1/100 = 1/100$. Звідси фокусна відстань для довжини хвилі 10 мкм дорівнює $f_d = f = 100$ мм.

Тоді довжина хвилі λ_0 і фокусна відстань f_0 для розрахунку ДЛ дорівнюють $\lambda_0 = 10 \sqrt{1 + \frac{0,02272 \cdot 100^3}{12,5^4}} = 13,9$ мкм і $f_0 = 100 \frac{10}{13,9} = 71,9$ мм відповідно.

Приклад 5.9. Отримайте вираз фазової функції параксіального кіноформного елемента (КЕ).

Розв'язання. Розглянемо оптичну схему КЕ, яка представлена на рис. 5.55. Радіус q -ої зони Френеля визначається за формулою (5.11):

$$R_q = \sqrt{2\lambda_0 f q}.$$

Використаємо наближення $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. Тоді

$$d(r)(n-1) = f \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R_q^2}{f^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{f^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{R_q^2}{f} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{f}.$$

Підставимо останній вираз до фазової функції

$$\varphi_{doe}(r) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{1}{2} \frac{R_q^2}{f} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{f} \right) = 2\pi \left(q - \frac{1}{2} \frac{r^2}{f\lambda_0} \right),$$

коли $r_q < r < r_{q+1}$. Отримана функція $\varphi_{doe}(r)$ співпадає з виразом (5.28).

Приклад 5.10. Трифокальна дифракційна інтраокулярна лінза має фокуси, які зміщені відносно центрального фокуса $f_0 = 22,6$ мм на ± 2 дптр. Діаметр лінзи $D_p = 7$ мм, а дифракційна ефективність для довжини хвилі $\lambda = 0,555$ мкм у кожному фокусі становить $\eta = 30\%$. Кожен фокус має мінімальну пляму, яка визначається кружком Ейрі. Розрахуйте МПФ такої лінзи для кожного фокуса при наявності рівномірного фону, який формується іншими фокусами.

Розв'язання. 1. Очевидно, що в кожній фокальній площині F_1 , F_0 , F_2 окрім головного зображення буде створюватися фонове (рис. 5.56), в результаті чого знижується контраст головного зображення. Проведемо оцінку контрасту зображення, яке формує така лінза, без урахування аберацій і додаткового фону із сумарною ефективністю 10%.

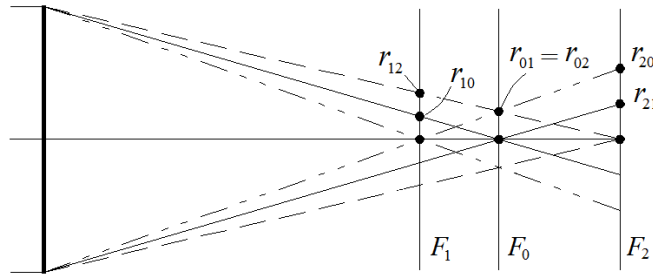


Рис. 5.56. Формування зображення трифокальною ІОЛ

Оцінка контрасту зображення зводиться до розрахунку МПФ, яка в полярній системі координат є модулем перетворення Фур'є-Беселя від функції розподілу інтенсивності $I(r_0)$ в зображенні нескінченно віддаленого об'єкта

$$M(\nu_r) = 2\pi \left| \int_0^\infty I(r_0) J_0(2\pi \nu_r r_0) r_0 dr_0 \right|, \quad (5.221)$$

де ν_r – просторова частота; r_0 – радіальна координата в площині зображення. Згідно рис. 5.56, розподіл інтенсивності в i -й фокальній площині є сумою інтенсивності головного $I_i(r_0)$ і фонового $I_{BG}(r_0)$ зображень, що можна записати як (рис. 5.57)

$$I(r_0) = I_i(r_0) + I_{BG}(r_0). \quad (5.222)$$

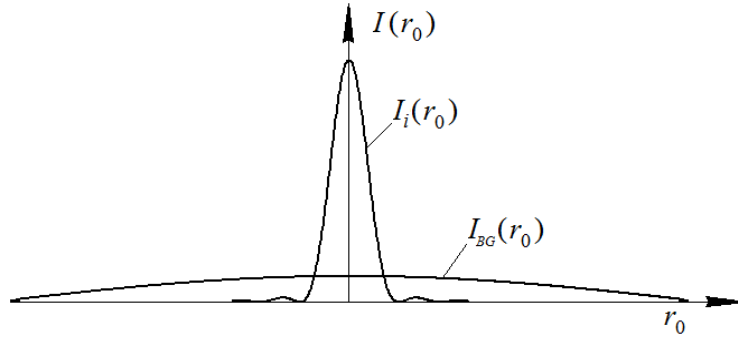


Рис. 5.57. Розподіл інтенсивності світла в i -й фокальній площині трифокальної ІОЛ

Виходячи з міркувань, що в кожній фокальній площині дана ІОЛ буде головне зображення подібно тонкій лінзі, для якої зображенням нескінченно віддаленого об'єкта є функція розсіювання точки (ФРТ), то розподіл інтенсивності головного зображення в i -й фокальній площині можна розглядати як дифракцію світла на круглій апертурі лінзи (див. формулу (2.86) і задачу 4.11). Тоді розподіл інтенсивності $I_i(r_0)$ описується функцією

$$I_i(r_0) = \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_i} \right)^2 \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda f_i} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_i} r_0} \right]^2, \quad (5.223)$$

де R – світловий радіус ІОЛ; λ – довжина хвилі світла, що освітлює лінзу; f_i – фокусна відстань ІОЛ для i -ї фокальної площини. З урахуванням дифракційної ефективності світла в i -й фокальній площині вираз (5.223) можна представити у вигляді:

$$I_i(r_0) = \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_i} \right)^2 \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda f_i} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_i} r_0} \right]^2, \quad (5.224)$$

де η – дифракційна ефективність світла в i -й фокальній площині.

Фонове зображення в i -й фокальній площині є сумою фонових зображень від сусідніх фокальних площин (див. рис. 5.56). Також на рис. 5.56 радіальні розміри фонових зображень позначені r_{ij} (перша цифра індексу вказує i -у фокальну площину, в якій розглядається зображення, а друга – j -у фокальну площину, яка створює фон в площині, що розглядається).

З умов задачі відомі діаметр ІОЛ і положення її фокальних площин. Тоді шляхом геометричного розрахунку можна обчислити радіальний розмір фонових складових r_{ij} в кожній фокальній площині.

2. Розрахунок фонових інтенсивностей.

Якщо ближня та дальня фокусні відстані лінзи мають значення:

$$f_1 = \frac{1000}{\frac{1000}{f_0} + 2} = 21,62 \text{ мм};$$

$$f_2 = \frac{1000}{\frac{1000}{f_0} - 2} = 23,67 \text{ мм},$$

то радіальні розміри всіх фонових складових дорівнюють:

$$\frac{D/2}{f_0} = \frac{r_{10}}{f_0 - f_1} \rightarrow r_{10} = 0,151 \text{ мм};$$

$$\frac{D/2}{f_2} = \frac{r_{12}}{f_2 - f_1} \rightarrow r_{12} = 0,303 \text{ мм};$$

$$\frac{D/2}{f_1} = \frac{r_{01}}{f_0 - f_1} \rightarrow r_{01} = 0,158 \text{ мм};$$

$$\frac{D/2}{f_2} = \frac{r_{02}}{f_2 - f_0} \rightarrow r_{02} = 0,158 \text{ мм};$$

$$\frac{D/2}{f_0} = \frac{r_{20}}{f_2 - f_0} \rightarrow r_{20} = 0,166 \text{ мм};$$

$$\frac{D/2}{f_1} = \frac{r_{21}}{f_2 - f_1} \rightarrow r_{21} = 0,331 \text{ мм}.$$

Також розрахуємо значення радіусів кружка Ейрі в кожній фокальній площині за формулою (2.92):

$$r_{E0} = 1,22 \frac{\lambda f_0}{D} = 1,22 \frac{0,555 \cdot 10^{-3} \cdot 22,6}{7} = 2,186 \cdot 10^{-3} \text{ мм};$$

$$r_{E1} = 1,22 \frac{\lambda f_1}{D} = 1,22 \frac{0,555 \cdot 10^{-3} \cdot 21,62}{7} = 2,062 \cdot 10^{-3} \text{ мм};$$

$$r_{E2} = 1,22 \frac{\lambda f_2}{D} = 1,22 \frac{0,555 \cdot 10^{-3} \cdot 23,67}{7} = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Наступним етапом буде визначення інтенсивності кожної фонової складової в межах її радіального розміру. Слід зазначити, що інтенсивність фонового зображення залежить від ефективності світла в кожній фокальній площині. Оскільки ці ефективності рівні (складають по 30% в кожній площині), то об'єм під поверхнею $I_{BG}(r_0)$ буде в два рази більший об'єму під кривою $I_i(r_0)$ для будь-якої фокальної площини (див. рис. 5.57).

Об'єм фігури, що утворюється шляхом обертання кривої $f(x)$ навколо осі z розраховується за допомогою виразу

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (5.225)$$

В першому наближенні вважатимемо, що інтенсивність j -ї фонової складової в i -й фокальній площині має рівномірний розподіл.

Зробимо ряд зауважень стосовно розмірності і величин оптичного поля. Інтенсивність світла вимірюється у Вт/м², а потік випромінювання – у Вт. Відповідно до виразу (5.225), $f(x)$ – це інтенсивність світла, а $x dx$ – площа, тоді V – це потік випромінювання.

Модуляційна передавальна функція не залежить від величин потоку, який проходить через лінзу, а визначається розподілом інтенсивності світла у кожній фокальній площині. З метою спрощення розрахунків потік світла будемо вимірювати у *од. потоку*, а інтенсивність – $\frac{\text{од. потоку}}{\text{мм}^2}$.

Розглянемо випадок рівномірного розподілу фонової інтенсивності.

1) Інтенсивність фонових зображень в першій фокальній площині F_1 :

- потік світла в головному зображенні:

$$V_1 = 2\pi \int_0^{r_{E1}} r_0 \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_i} \right)^2 \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda f_i} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_i} r_0} \right]^2 dr_0 = 9,673 \text{ од. потоку};$$

- потік світла кожної фонової складової:

$$V_{10} = V_{12} = V_1 = 9,673 \text{ од. потоку};$$

- фонова інтенсивність від площини F_0 :

$$I_{10} = \frac{V_{10}}{\pi r_{10}^2} = \frac{9,673}{\pi \cdot 0,151^2} = 134,4 \frac{\text{од. потоку}}{\text{мм}^2}, \text{ коли } r_0 < 0,151 \text{ мм};$$

- фонова інтенсивність від площини F_2 :

$$I_{12} = \frac{V_{12}}{\pi r_{12}^2} = \frac{9,673}{\pi \cdot 0,303^2} = 33,6 \frac{\text{од. потоку}}{\text{мм}^2}, \text{ коли } r_0 < 0,303 \text{ мм};$$

2) Інтенсивність фонових зображень в нульовій фокальній площині F_0 :

- потік світла в головному зображенні:

$$V_0 = 2\pi \int_0^{r_{E0}} r_0 \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_0} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda f_0} r_0 \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_0} r_0} \right]^2 dr_0 = 9,673 \text{ од. потоку};$$

- потік світла кожної фонові складові:

$$V_{01} = V_{02} = V_0 = 9,673 \text{ од. потоку};$$

- інтенсивність від площини F_1 :

$$I_{01} = \frac{V_{01}}{\pi r_{01}^2} = \frac{9,673}{\pi \cdot 0,158^2} = 123 \frac{\text{од. потоку}}{\text{мм}^2}, \text{ коли } r_0 < 0,158 \text{ мм};$$

- інтенсивність від площини F_2 :

$$I_{02} = \frac{V_{01}}{\pi r_{02}^2} = \frac{9,673}{\pi \cdot 0,158^2} = 123 \frac{\text{од. потоку}}{\text{мм}^2}, \text{ коли } r_0 < 0,158 \text{ мм};$$

3) Інтенсивність фонових зображень в другій фокальній площині F_2 :

- потік світла в головному зображенні:

$$V_2 = 2\pi \int_0^{r_{E2}} r_0 \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_2} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda f_2} r_0 \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_2} r_0} \right]^2 dr_0 = 9,673 \text{ од. потоку};$$

- потік світла кожної фонові складові:

$$V_{20} = V_{21} = V_2 = 9,673 \text{ од. потоку};$$

- інтенсивність від площини F_0 :

$$I_{20} = \frac{V_{20}}{\pi r_{20}^2} = \frac{9,673}{\pi \cdot 0,166^2} = 112,2 \frac{\text{од. потоку}}{\text{мм}^2}, \text{ коли } r_0 < 0,166 \text{ мм};$$

- інтенсивність від площини F_1 :

$$I_{21} = \frac{V_{21}}{\pi r_{21}^2} = \frac{9,673}{\pi \cdot 0,331^2} = 28,04 \frac{\text{од. потоку}}{\text{мм}^2}, \text{ коли } r_0 < 0,331 \text{ мм}.$$

На рис. 5.58 наведено графік розподілу інтенсивності фону в кожній фокальній площині.

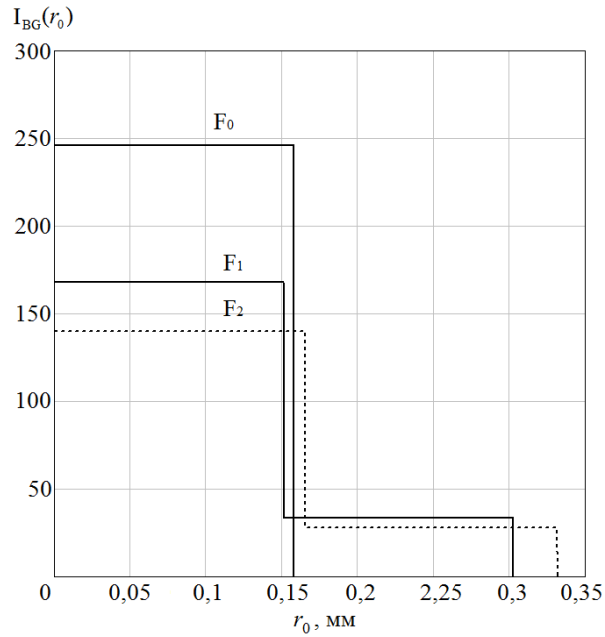


Рис. 5.58. Інтенсивність фонового зображення в кожній фокальній площині

3. Розрахунок МПФ при наявності рівномірних фонових зображень.

Використовуючи рівняння (5.221), (5.222), (5.224) та отримані розподіли фонового зображення в кожній фокальній площині (рис. 5.58), розрахуємо МПФ для різних фокальних площин:

$$M_0(v_r) = \frac{2\pi \int_0^{r_{01}} \left\{ \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_0} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda f_0} r_0 \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_0} r_0} \right]^2 + I_{01} + I_{02} \right\} J_0(2\pi v_r r_0) r_0 dr_0}{2\pi \int_0^{r_{01}} \left\{ \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_0} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda f_0} r_0 \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_0} r_0} \right]^2 + I_{01} + I_{02} \right\} r_0 dr_0};$$

$$M_1(v_r) = \frac{2\pi \int_0^{r_{12}} \left\{ \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_1} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda f_1} r_0 \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_1} r_0} \right]^2 + I_{01} + I_{02} \right\} J_0(2\pi v_r r_0) r_0 dr_0}{2\pi \int_0^{r_{12}} \left\{ \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_2} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda f_1} r_0 \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_1} r_0} \right]^2 + I_{12} + I_{12} \right\} r_0 dr_0};$$

$$M_2(v_r) = \frac{2\pi \int_0^{r_{21}} \left\{ \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_2} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda f_2} r_0 \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_2} r_0} \right]^2 + I_{01} + I_{02} \right\} J_0(2\pi v_r r_0) r_0 dr_0}{2\pi \int_0^{r_{21}} \left\{ \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_2} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda f_2} r_0 \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_2} r_0} \right]^2 + I_{12} + I_{12} \right\} r_0 dr_0}.$$

Розрахунок було здійснено в Mathcad. На рис. 5.59 наведено графіки цих функцій. МПФ в першій і другій фокальних площинах зображені однією

кривою, оскільки вони в значній мірі співпадають, що пояснюється майже однаковим розподілом інтенсивності фону (див. рис. 5.58).

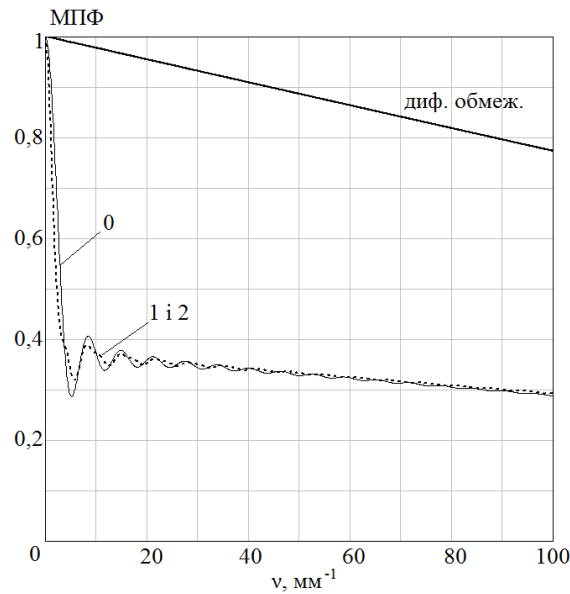


Рис. 5.59. МПФ за наявності рівномірного фону:
«0» – МПФ у 0-й фокальній площині; «1, 2» – МПФ у 1-й і 2-й фокальних площинах

Приклад 5.11. Трифокальна дифракційна інтраокулярна лінза має фокуси, які зміщені відносно центрального фокуса $f_0 = 22,6$ мм на ± 2 дптр. Діаметр лінзи $D_p = 7$ мм, а дифракційна ефективність для довжини хвилі $\lambda = 0,555$ мкм у кожному фокусі становить $\eta = 30\%$. Кожен фокус має мінімальну пляму, яка визначається кружком Ейрі. Розрахуйте МПФ такої лінзи для кожного фокуса при наявності нерівномірного фону, який формується іншими фокусами в результаті дифракції світла на апертурі лінзи. Порівняйте отримані результати з прикладом 5.10.

Розв'язання. 1. Скористаємося результатами прикладу 5.10. Очевидно, що в кожній фокальній площині F_1, F_0, F_2 окрім головного зображення буде створюватися фон (рис. 5.56), в результаті дифракції світла на апертурі лінзи. МПФ визначається як нормоване перетворення Фур'є-Бесселя від функції розподілу інтенсивності $I(r_0)$ в зображенні нескінченно віддаленого точкового джерела випромінювання

$$M(\nu_r) = \frac{\int_0^\infty I(r_0) J_0(2\pi \nu_r r_0) r_0 dr_0}{\int_0^\infty I(r_0) r_0 dr_0}, \quad (5.226)$$

де ν_r – просторова частота; r_0 – радіальна координата в площині зображення. Згідно рис. 5.56, розподіл інтенсивності в i -й фокальній площині є сумою інтенсивності головного $I_i(r_0)$ і фонового $I_{BG}(r_0)$ зображень (рис. 5.57), що можна записати як

$$I(r_0) = I_i(r_0) + I_{BG}(r_0)$$

2. Розрахунок нерівномірних фонових інтенсивностей.

Розглянемо фонове зображення із нерівномірним розподілом інтенсивності. Нерівномірна інтенсивність від j -ї фокальної площини (з урахуванням дифракційної ефективності) визначимо із міркувань, що її форма має бути подібною формі інтенсивності головного зображення, а її перший мінімум знаходиться на границі існування фону. Виходячи з наведених міркувань, отримано вираз розподілу інтенсивності нерівномірного фону в заданій i -й фокальній площині від j -ї фокальної площини

$$I_{ij}(r_0) = \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_i} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R r_E r_0}{\lambda f_i r_{ij}} \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f_i} r_0} \right]^2, \quad (5.227)$$

де r_E – радіус кружка Ейрі головного зображення в i -й фокальній площині; r_{ij} – радіус фонового зображення, створеного j -ю фокальною площиною в i -й площині. Сумарне фонове зображення $I_{BG}(r_0)$ в i -й площині є сумою інтенсивності від сусідніх площин.

Для підтвердження вірності рівняння (5.227) проведемо розрахунок інтенсивності фонових зображень, наприклад, у фокальній площини F_1 . Із прикладу 5.9 маємо, що об'єм інтенсивності головного зображення в першій фокальній площині (як і у всіх інших площинах) складає $V_1 = 9,673$ кб.од. Отже:

- об'єм інтенсивності фонового зображення в першій фокальній площині від нульової фокальної площини:

$$V_{10} = 2\pi \int_0^{r_{10}} r_0 \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_1} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R r_E r_0}{\lambda f_1 r_{10}} \right)}{\frac{2\pi R r_E}{\lambda f_1 r_{10}}} \right]^2 dr_0 = 9,673 \text{ од. потоку};$$

- об'єм інтенсивності фонового зображення в першій фокальній площині від другої фокальної площини:

$$V_{12} = 2\pi \int_0^{r_{12}} r_0 \eta \left(\frac{\pi R^2}{\lambda f_1} \right)^2 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R r_E r_0}{\lambda f_1 r_{12}} \right)}{\frac{2\pi R r_E}{\lambda f_1 r_{12}}} \right]^2 dr_0 = 9,673 \text{ од. потоку};$$

Таким чином, об'єми інтенсивності кожної фонової складової дорівнюють об'єму інтенсивності головного зображення.

На рис. 5.60 зображені розподіли інтенсивності фонових зображень в кожній фокальній площині.

3. Розрахунок МПФ при наявності нерівномірних фонових зображень.

Використовуючи рівняння (5.226) і (5.227) розрахуємо МПФ в кожній фокальній площині:

- МПФ головного зображення в нульовій фокальній площині:

$$M_0(\nu_r) = \left| \frac{\int_0^{r_{01}} [I_0(r_0) + I_{01}(r_0) + I_{02}(r_0)] J_0(2\pi \nu_r r_0) r_0 dr_0}{\int_0^{r_{01}} [I_0(r_0) + I_{01}(r_0) + I_{02}(r_0)] r_0 dr_0} \right|;$$

- МПФ головного зображення в першій фокальній площині:

$$M_1(\nu_r) = \left| \frac{\int_0^{r_{12}} [I_1(r_0) + I_{10}(r_0) + I_{12}(r_0)] J_0(2\pi \nu_r r_0) r_0 dr_0}{\int_0^{r_{12}} [I_1(r_0) + I_{10}(r_0) + I_{12}(r_0)] r_0 dr_0} \right|;$$

- МПФ головного зображення в другій фокальній площині:

$$M_2(\nu_r) = \left| \frac{\int_0^{r_{21}} [I_2(r_0) + I_{20}(r_0) + I_{21}(r_0)] J_0(2\pi \nu_r r_0) r_0 dr_0}{\int_0^{r_{21}} [I_2(r_0) + I_{20}(r_0) + I_{21}(r_0)] r_0 dr_0} \right|;$$

Розрахунок було здійснено в Mathcad. На рис. 5.61 наведено графіки цих функцій. Графіки МПФ для всіх фокальних площин практично співпадають, проте існує незначна різниця на низьких просторових частотах між першою, другою та нульовою площинами.

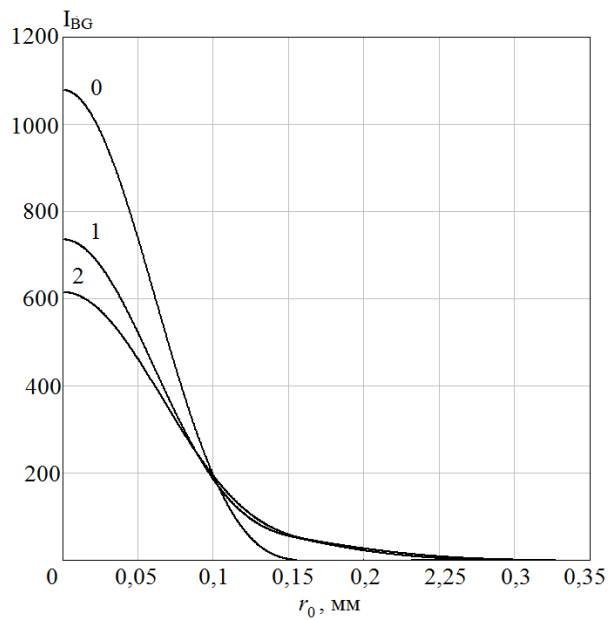


Рис. 5.60. Інтенсивність фонових зображень в кожній фокальній площині

Порівняння МПФ на рис. 5.59 і 5.61 свідчить про те, що вони мало відрізняються одна від одної. Це дозволяє розглядати фон у кожній фокальній площині у вигляді рівномірного розподілу, що значно спрощує математичні перетворення при обчисленні МПФ три фокальних ІОЛ.

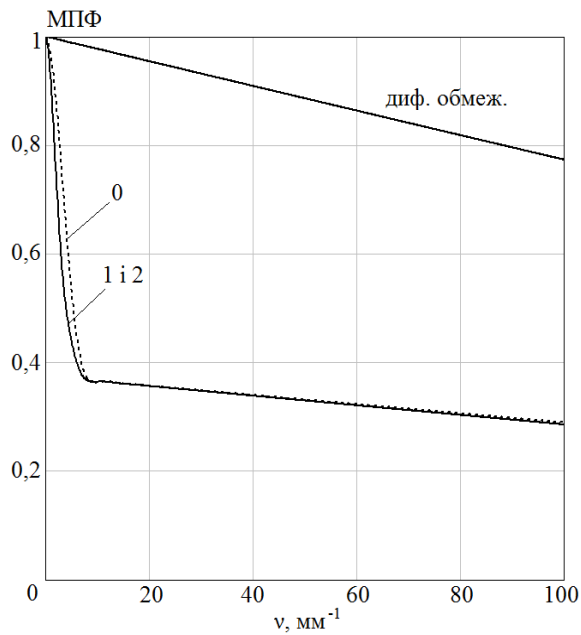


Рис. 5.61. МПФ трифокальної ІОЛ за наявності нерівномірного фону: «0» – МПФ в нульовій фокальній площині; «1 і 2» – МПФ в першій і другій фокальних площинах

5.12. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1. Визначте положення перших двох дійсних і уявних фокусів під час дифракції світла на круглому отворі діаметром $D_p = 4$ мм за довжини хвилі $\lambda = 0,55$ мкм.

Вказівка. Скористайтесь підрозділом 5.3.

Відповідь: $f_1 = 7,27$ м; $f_2 = 2,42$ м; $f_{-1} = -7,27$ м; $f_{-2} = -2,42$ м.

Задача 5.2. Визначте фокусні відстані f_0 , f_{+1} і f_{-1} під час дифракції світла на круглому отворі діаметром $D_p = 1$ мм, коли на екран падає збіжна сферична хвиля, з радіусом $r_0 = 20$ мм і довжиною хвилі $\lambda = 0,55$ мкм.

Вказівка. Скористайтесь підрозділом 5.3.3.

Відповідь: $f_0 = 20$ мм; $s_{+1} = 19,15$ мм; $s_{-1} = 20,92$ мм.

Задача 5.3. Використовуючи формулу (5.69), отримайте рівняння (5.70).

Задача 5.4. Знайдіть залежність фазової затримки $\varphi(r)$ в лінзі від відстані r до оптичної осі. Лінза виготовлена із германію і має такі параметри: $r_1 = 100$ мм; $r_2 = -100$ мм; $d_0 = 10$ мм; $n = 4,00$; $D_l = 20$ мм. Довжина хвилі ІЧ випромінювання $\lambda_0 = 10$ мкм.

Вказівка. Скористайтесь формулами (3.4) і (3.12) для довільної точки на поверхні лінзи.

Відповідь:
$$\varphi(r) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[nd_0 - \frac{r^2}{2} (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right].$$

Задача 5.5. На плоский кіноформний елемент нормально падає монохроматична світло з довжиною хвилі $\lambda_0 = 10$ мкм і фокусується на відстані $f_0 = 50$ мм. На якій відстані буде фокусуватися світло з довжиною хвилі $\lambda_1 = 12$ мкм?

Відповідь:
$$f_1 = f_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 50 \frac{10}{12} = 41,67 \text{ мм.}$$

Задача 5.6. Трифокальна дифракційна інтраокулярна лінза має фокуси, які зміщені відносно центрального фокуса $f_0 = 22,6$ мм на ± 2 дптр. Діаметр лінзи $D_p = 7$ мм, а дифракційна ефективність для довжини хвилі $\lambda = 0,555$

мкм у кожному фокусі становить $\eta = 30\%$. Знайдіть розподіл інтенсивності уздовж оптичної осі, виходячи із законів геометричної оптики.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 5.10.

Задача 5.7. Трифокальна дифракційна інтраокулярна лінза має мікропрофіль відносно базової поверхні $h(r) = h_0 \cos(2\pi a r^2)$. Знайдіть розподіл інтенсивності у кожному максимумі уздовж осі. Дослідіть залежність положення максимумів і їх дифракційну ефективність від параметрів мікропрофілю h_0 і a .

РОЗДІЛ 6. КОГЕРЕНТНІ СПЕКТРОАНАЛІЗАТОРИ

6.1. Фізичні основи роботи когерентних спектроаналізаторів

Когерентні оптичні системи для спектрального аналізу просторових сигналів давно вже відомі в класичній оптиці, а широке їх застосування в радіолокації, метрології, мікробіології тощо стало можливим у зв'язку з бурхливим розвитком лазерної техніки [12; 31, 32]. З розвитком голографії з'явилась можливість створення оптичних спектроаналізаторів, які забезпечують реєстрацію амплітудного і фазового спектрів досліджуваного сигналу. Відомо ряд монографій і статей, присвячених фізичним основам роботи когерентних (лазерних) спектроаналізаторів [33, 34], але в них не відображені методи проектування оптичних систем, покладених в основу таких спектроаналізаторів. У цьому розділі розглянемо фізичні й практичні проблеми проектування когерентних спектроаналізаторів. Теоретичні основи спектроаналізаторів було детально розглянуто в підрозділі 3.3; візьмемо цей матеріал за основу для розробки ефективної методики аналізу поширення когерентних світлових хвиль в оптичній системі спектроаналізаторів.

6.1.1. Узагальнені оптичні схеми спектроаналізаторів

Оптична система когерентного спектроаналізатора може бути виконана за двома принципово різними схемами:

а) вхідний транспарант із записом досліджуваного просторового сигналу у вигляді змінного амплітудного коефіцієнта пропускання розміщений перед об'єктивом (рис. 6.1, а);

б) вхідний транспарант міститься за об'єктивом (рис. 2.1, б).

У розділі 3 було доведено, що у разі відповідного вибору геометричних параметрів l_{01} , l_{12} і l_{23} оптичних систем розподіл поля у площині x_3u_3 являє собою просторовий спектр розподілу поля у площині x_1u_1 для системи, яка зображена на рис. 6.1,а, і в площині x_2u_2 для схеми, яка наведена на рис. 6.1,б. Окрім того, розподіл поля у площині x_3u_3 включає квадратичні фазові

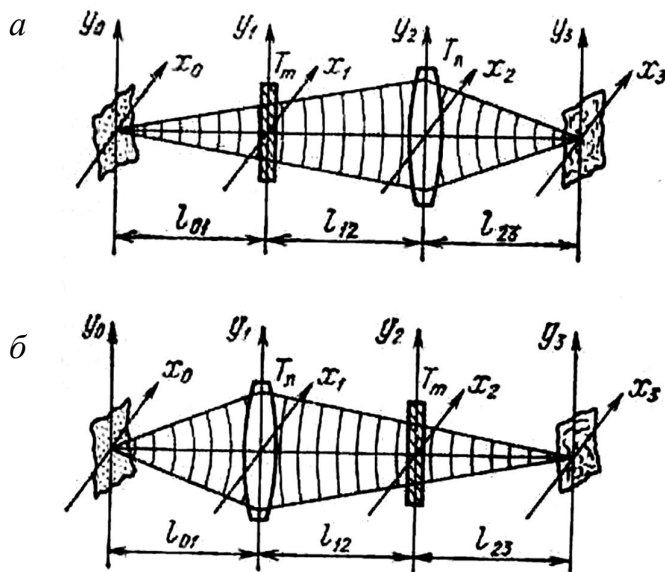


Рис. 6.1. Принципи побудови оптичної системи когерентних спектроаналізаторів:
а – вхідний транспарант перед об'єктивом;
б – вхідний транспарант за об'єктивом

спотворення поля, несуттєві у разі реєстрації лише амплітудного спектра сигналу, однак за амплітудно-фазових методів реєстрації вони вносять додаткові похибки і значно ускладнюють інтерпретацію результатів досліджень.

На основі класичного принципу Гюйгенса–Френеля у загальному вигляді розглянемо методику побудови оптичних систем спектроаналізаторів

просторових сигналів, отримаємо основні математичні залежності, які описують поширення когерентної світлової хвилі в оптичних системах таких пристроїв, коли враховуються квадратичні фазові спотворення. Це дає можливість визначити оптимальні геометричні розміри оптичної системи, які дозволяють повністю усунути чи зменшити величину квадратичних фазових спотворень спектра сигналу.

Когерентний оптичний спектроаналізатор розглядатимемо у вигляді ряду послідовних паралельних площин, в яких розміщено джерело когерентного випромінювання, вхідний транспарант, об'єктив і фотореєстратор спектра. Між площинами є шари вільного простору, поширення когерентної хвилі в яких підпорядковано принципу Гюйгенса–Френеля:

$$V(x_i, y_i) = A_{GF} \iint_{S_{i-1}} V(x_{i-1}, y_{i-1}) \times \exp[jkr(x_i, y_i; x_{i-1}, y_{i-1})] dx_{i-1} dy_{i-1}, \quad (6.1)$$

де $V(x_i, y_i)$ і $V(x_{i-1}, y_{i-1})$ – розподіл комплексної амплітуди поля в i -й та $i-1$ -й площинах відповідно; A_{GF} – комплексна стала; $r(x_i, y_i; x_{i-1}, y_{i-1})$ – відстань між двома будь-якими точками на i -й та $i-1$ -й площинах;

S_{i-1} – область інтегрування за $i-1$ -ю площиною; k – хвильове число, $k = 2\pi/\lambda$; λ – довжина хвилі когерентного випромінювання.

Вважатимемо, що на шляху поширення випромінювання між площинами спостерігається дифракція Френеля (2.56). Тоді рівняння (6.1) має вигляд

$$V(x_i, y_i) = \Phi_{i-1,i}\{V(x_{i-1}, y_{i-1})\} = A_F \iint_{S_{i-1}} V(x_{i-1}, y_{i-1}) \times \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda l_{i-1,i}} [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]\right\} dx_{i-1} dy_{i-1}, \quad (6.2)$$

де $\Phi_{i-1,i}\{ \}$ – оператор, який описує дифракцію Френеля на ділянці вільного простору товщиною $l_{i-1,i}$; A_F – комплексна стала, $A_F = \frac{\exp\left(j \frac{2\pi l_{i-1,i}}{\lambda}\right)}{j\lambda l_{i-1,i}}$.

Із виразу (6.2) видно, що амплітуда поля у площині $x_i y_i$ є згортокою амплітуди поля у площині $x_{i-1} y_{i-1}$ з імпульсним відгуком дифракції Френеля h_F шару вільного простору товщиною $l_{i-1,i}$, де

$$h_F(x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}) = \frac{\exp\left(j \frac{2\pi l_{i-1,i}}{\lambda}\right)}{j\lambda l_{i-1,i}} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda l_{i-1,i}} [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]\right\}. \quad (6.3)$$

Якщо на шляху поширення світла помістити просторовий транспарант із комплексним амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_i, y_i)$, то розподіл амплітуди поля за транспарантом

$$V'(x_i, y_i) = V(x_i, y_i) t_o(x_i, y_i). \quad (6.4)$$

Співвідношення (6.4) означає, що амплітуда поля модулюється транспарантом за законом $t_o(x_i, y_i)$.

Застосовуючи співвідношення (6.2) і (6.4) до оптичної системи, зображеної на рис. 6.1,а, можна записати, що

$$V(x_3, y_3) = \Phi_{23}\{t_l(x_2, y_2)\Phi_{12}\{t_o(x_1, y_1)\Phi_{01}\{V(x_0, y_0)\}\}\}, \quad (6.5)$$

де $t_o(x_1, y_1)$ – просторова функція пропускання вхідного транспаранта із записом досліджуваного сигналу; $t_l(x_2, y_2)$ – коефіцієнт пропускання об'єктива, який у параксіальному наближенні, як було обґрунтовано в розділі 3, описується функцією

$$t_l(x_2, y_2) = \exp(-jknd_0) \exp\left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x_2^2 + y_2^2)\right], \quad (2.6)$$

де n – показник заломлення матеріалу; d_0 – товщина лінзи вздовж оптичної осі; f – фокусна відстань об’єктива.

6.1.2. Функціональні перетворення в оптичних системах

Нехай у площині $x_0 y_0$ розміщено точкове джерело когерентного випромінювання з довжиною хвилі λ та амплітудою V_0 , яке описується функцією

$$V(x_0, y_0) = V_0 \delta(x_0, y_0), \quad (6.7)$$

де $\delta(x_0, y_0)$ – дельта-функція.

Підставимо функцію (6.7) у рівняння (6.2) з урахуванням імпульсного відгуку (6.3) і використаємо фільтрувальну властивість дельта-функції, тоді амплітуда поля у площині $x_1 y_1$ визначається функцією

$$V(x_1, y_1) = V_0 C_{01} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{01}} (x_1^2 + y_1^2)\right], \quad (6.8)$$

$$\text{де } C_{01} = \frac{\exp\left(j \frac{2\pi l_{01}}{\lambda}\right)}{j \lambda l_{01}}.$$

Рівняння (6.8) описує в квадратичному наближенні розбіжну сферичну хвилю.

Розподіл амплітуди поля безпосередньо за вхідним транспарантом, розміщеним у площині $x_1 y_1$, згідно зі співвідношенням (6.4)

$$V'(x_1, y_1) = V(x_1, y_1) t_o(x_1, y_1). \quad (6.9)$$

Застосуємо оператор Френеля (6.2) з урахуванням імпульсного відгуку (6.3) до простору між площинами $x_1 y_1$ та $x_2 y_2$. Тоді амплітуда поля у площині $x_2 y_2$ перед об’єктивом

$$\begin{aligned} V(x_2, y_2) &= \Phi_{12}\{V(x_1, y_1)\} = \\ &= V_0 C_{02} \iint_{S_1} V'(x_1, y_1) \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda l_{12}} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\text{де } C_{02} = V_0 C_{01} C_{12} = -\frac{\exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} (l_{01} + l_{12})\right]}{\lambda^2 l_{01} l_{12}}.$$

Амплітуда поля за об’єктивом, який має амплітудний коефіцієнт

пропускання (6.6),

$$\begin{aligned} V'(x_2, y_2) &= V(x_2, y_2)t_l(x_2, y_2) = \\ &= V(x_2, y_2)\exp(-j k n d_0)\exp\left[-j \frac{\pi}{\lambda f}(x_2^2 + y_2^2)\right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Застосуємо оператор Френеля (6.2) до простору між площинами x_2y_2 і x_3y_3 з урахуванням співвідношення (6.9). Тоді амплітуда поля у площині аналізу x_3y_3

$$\begin{aligned} V(x_3, y_3) &= \Phi_{23}\{V'(x_2, y_2)\} = \\ &= V_0 C_{03} \iint_{S_1} \iint_{S_2} t_o(x_1, y_1) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{01}}(x_1^2 + y_1^2)\right] \times \\ &\times \exp\left[-j \frac{\pi}{\lambda f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda l_{12}}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\right\} \times \\ &\times \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda l_{23}}[(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2]\right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\text{де } C_{03} = V_0 C_{01} C_{12} C_{23} = -\frac{\exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda}(l_{01} + l_{12} + n d_0 + l_{23})\right]}{j \lambda^3 l_{01} l_{12} l_{23}}.$$

Вираз (6.12) може бути поданий у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_3, y_3) &= V_0 C_{03} \iint_{S_1} t_o(x_1, y_1) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{01}}(x_1^2 + y_1^2)\right] \times \\ &\times \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{12}}(x_1^2 + y_1^2)\right] \iint_{S_2} \exp\left[-j \frac{\pi}{\lambda f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ &\times \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{12}}(x_2^2 + y_2^2)\right] \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{23}}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ &\times \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda l_{12}}(x_2 x_1 + y_2 y_1)\right] \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda l_{23}}(x_3 x_2 + y_3 y_2)\right] \times \\ &\times dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda l_{23}}(x_3^2 + y_3^2)\right] dx_2 dy_2 dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Групуючи експоненціальні співмножники і виносячи за знак інтегралів ті з них, які не залежать від змінних інтегрування, а також використовуючи табличний інтеграл 2.3.15.11 із [4],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p x^2 - q x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right),$$

вираз (6.13) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
V(x_3, y_3) = & -\frac{2\pi V_0 C_{03}}{jk\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)} \times \\
& \times \exp\left\{jk\left[\frac{1}{2l_{23}} - \frac{1}{2l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}\right](x_3^2 + y_3^2)\right\} \times \\
& \times \iint_{S_1} t_o(x_1, y_1) \exp\left\{jk\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_{01}} + \frac{1}{l_{12}}\right) - \frac{1}{2l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}\right](x_1^2 + y_1^2)\right\} \times \\
& \times \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda l_{12}l_{23}\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}(x_3x_1 + y_3y_1)\right] dx_1 dy_1.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Вираз (6.14) описує розподіл амплітуди поля в довільній площині спостереження x_3y_3 і включає ряд експоненціальних фазових множників. Якщо підінтегральний квадратичний експоненціальний множник дорівнює одиниці, амплітуда поля $V(x_3, y_3)$ у площині x_3y_3 буде з точністю до фазового множника просторовим спектром (фур'є-образом) амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта $t_o(x_1, y_1)$, розміщеного у площині x_1y_1 .

Справді, умова

$$\exp\left\{jk\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_{01}} + \frac{1}{l_{12}}\right) - 2l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)\right](x_1^2 + y_1^2)\right\} = 1$$

виконується, коли

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_{01}} + \frac{1}{l_{12}}\right) - 2l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right) = 0. \tag{6.15}$$

Із рівняння (6.15) маємо

$$l_{23} = \frac{f(l_{01} + l_{12})}{(l_{01} + l_{12}) - f}. \tag{6.16}$$

Вираз (6.16) дозволяє вибрати такі відстані $l_{i-1,i}$ між площинами оптичної системи, зображеної на рис. 6.1,а, за яких вказаний раніше фазовий множник усувається. Об'єktiv, який використовується для здійснення спектрального аналізу, інколи називають *фур'є-об'єktivом*.

Позначимо відстань між площинами, де розміщені джерело випромінювання і фур'є-об'єktiv, через $l_{02} = l_{01} + l_{12}$. Тоді зі співвідношення (6.16) можна отримати формулу лінзи:

$$\frac{1}{l_{02}} + \frac{1}{l_{23}} = \frac{1}{f}. \quad (6.17)$$

Отже, вибираючи параметри оптичної системи l_{02} та f , за допомогою формули (6.17) можна визначити положення l_{23} площини для спектрального аналізу $x_3 y_3$. Тобто, якщо виконується умова (6.17), за довільного положення вхідного транспаранта l_{01} і l_{12} у площині спостереження $x_3 y_3$ амплітуда поля визначається функцією

$$\begin{aligned} V(x_3, y_3) = & -\frac{2\pi V_0 C_{03}}{jk\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)} \times \\ & \times \exp\left\{jk\left[\frac{1}{2l_{23}} - \frac{1}{2l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}\right](x_3^2 + y_3^2)\right\} \times \\ & \times \iint_{S_1} t_o(x_1, y_1) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda l_{12} l_{23}\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}(x_3 x_1 + y_3 y_1)\right] dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Зі співвідношення (6.18) видно, що функція $V(x_3, y_3)$ пропорційна просторовому спектру пропускання транспаранта $t_o(x_1, y_1)$ із просторовими частотами

$$v_x = \frac{x_3}{\lambda l_{12} l_{23}\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}, \quad v_y = \frac{y_3}{\lambda l_{12} l_{23}\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}. \quad (2.19)$$

Змінюючи положення l_{12} вхідного транспаранта, можна згідно із співвідношенням (6.19) змінювати масштаб просторових частот v_x, v_y у спектрі досліджуваного сигналу з коефіцієнтом масштабу

$$\mu = \frac{v_x}{x_3} = \frac{v_y}{y_3} = \frac{1}{\lambda l_{12} l_{23}\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}. \quad (6.20)$$

Умова (6.15) рівності підінтегрального квадратичного множника одиниці у виразі (6.14) є необхідною і достатньою для виконання перетворення Фур'є оптичною системою. Однак отримане перетворення Фур'є має квадратичну модуляцію фази за рахунок фазового множника, який стоїть перед інтегралом у функції (6.18). Якщо цей множник дорівнює одиниці, квадратична модуляція фази може бути усунена, тобто

$$\exp\left\{jk\left[\frac{1}{2l_{23}} - \frac{1}{2l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}\right](x_3^2 + y_3^2)\right\} = 1,$$

звідки

$$\frac{1}{2l_{23}} - \frac{1}{2l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)} = 0. \quad (6.21)$$

Розв'язком рівняння (6.21) є $l_{12} = f$.

Отже, квадратичні фазові спотворення спектра сигналу в спектроаналізаторі, побудованому за схемою, поданою на рис. 6.1,а, можуть бути усунені у разі розміщення вхідного транспаранта у передній фокальній площині фур'є-об'єктива. При цьому транспарант може бути освітлений як сферичною, так і плоскою когерентною хвилею.

Аналогічні дослідження поширення когерентної хвилі можна виконати для оптичної системи спектроаналізатора, наведеної на рис. 6.1,б. У цьому разі амплітуду поля у площині спектрального аналізу x_3y_3 можна описати виразом

$$\begin{aligned} V(x_3, y_3) = & -\frac{2\pi V_0 C_{03}}{jk\left(\frac{1}{l_{01}} + \frac{1}{l_{12}} - \frac{1}{f}\right)} \exp\left[-j\frac{k}{2l_{23}}(x_3^2 + y_3^2)\right] \times \\ & \times \iint_{S_2} t_o(x_2, y_2) \exp\left\{j\frac{k}{2}\left[\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}\right](x_1^2 + y_1^2)\right\} \times \\ & \times \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda l_{23}}(x_3x_2 + y_3y_2)\right] dx_2 dy_2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Вираз (6.22) описує розподіл амплітуди поля в довільній площині спостереження x_3y_3 і включає ряд експоненціальних фазових множників. Якщо підінтегральний квадратичний експоненціальний множника дорівнює одиниці, амплітуда поля $V(x_3, y_3)$ у площині x_3y_3 буде з точністю до фазового множника просторовим спектром амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта $t_o(x_2, y_2)$, розміщеного у площині x_2y_2 .

$$\text{Справді, умова} \quad \exp\left\{j\frac{k}{2}\left[\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}\right](x_1^2 + y_1^2)\right\} = 1$$

виконується, коли

$$\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)} = 0. \quad (6.23)$$

Із рівняння (6.23) маємо

$$l_{23} = \frac{f(l_{01} + l_{12}) - l_{01}l_{12}}{l_{01} - f}. \quad (6.24)$$

Вираз (6.24) дозволяє вибрати такі відстані $l_{i-1,i}$ між площинами оптичної системи, поданої на рис. 6.1,б, за яких вказаний раніше фазовий множник усувається.

Позначимо відстань між площинами, де розміщені об'єктив і площина аналізу, через $l_{13} = l_{12} + l_{23}$. Тоді зі співвідношення (6.24) можна отримати формулу лінзи:

$$\frac{1}{l_{01}} + \frac{1}{l_{13}} = \frac{1}{f}. \quad (6.25)$$

Отже, вибираючи параметри оптичної системи l_{01} , l_{12} і f , за допомогою формули (6.24) можна визначити положення l_{23} площини для спектрального аналізу x_3y_3 . Тобто, якщо виконується умова (6.25), за довільного положення вхідного транспаранта l_{12} у площині спостереження x_3y_3 амплітуда поля визначається функцією

$$V(x_3, y_3) = -\frac{2\pi V_0 C_{03}}{jk\left(\frac{1}{l_{01}} + \frac{1}{l_{12}} - \frac{1}{f}\right)} \exp\left[-j\frac{k}{2l_{23}}(x_3^2 + y_3^2)\right] \times \\ \times \iint_{S_2} t_o(x_2, y_2) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda l_{23}}(x_3x_2 + y_3y_2)\right] dx_2 dy_2. \quad (6.26)$$

Зі співвідношення (6.26) видно, що функція $V(x_3, y_3)$ пропорційна просторовому спектру пропускання транспаранта $t_o(x_1, y_1)$ із просторовими частотами

$$v_x = \frac{x_3}{\lambda l_{23}}; \quad v_y = \frac{y_3}{\lambda l_{23}}. \quad (6.27)$$

Однак у спектрі сигналу спостерігається квадратична фазова модуляція, яка виникає за рахунок фазового множника, що стоїть перед інтегралом у виразі (6.26). Усунення цього множника, тобто рівність одиниці, досягається тільки на оптичній осі системи або за $l_{23} = \infty$, що не має практичного значення.

Отже, дослідження поширення когерентних світлових хвиль в оптичних спектроаналізаторах дозволяє зробити такі висновки:

1. У загальному випадку розподіл амплітуди поля у площині

спектрального аналізу x_3y_3 описується виразом (6.14) для оптичної системи, зображеної на рис. 6.1,а, і виразом (6.22) для системи, зображеної на рис. 6.1,б.

2. Якщо виконується умова (6.17) або (6.25), то розподіл амплітуди поля у площині спектрального аналізу x_3y_3 з точністю до фазового множника є спектром досліджуваного просторового сигналу $t_o(x_2, y_2)$.

3. Просторові частоти ν_x і ν_y спектра досліджуваного сигналу визначаються співвідношеннями (6.19) і (6.27) і є функціями геометричних параметрів оптичної системи спектроаналізатора. Змінюючи ці параметри можна вибирати необхідний масштаб спектра сигналу (6.20).

4. Фазові спотворення спектра, сформованого когерентним спектроаналізатором, можуть бути усунені тільки у схемі, поданій на рис. 6.1,а, якщо виконується умова $l_{12} = f$, тобто коли вхідний транспарант перебуває у передній фокальній площині фур'є-об'єктива, а спектр сигналу вимірюється у задній фокальній площині об'єктива.

6.2. Проектування спектроаналізаторів

На відміну від інших систем обробки інформації, когерентні оптичні спектроаналізатори відзначаються своєю простотою. Але при виборі оптичної системи для розв'язання тієї чи іншої задачі дуже важливо забезпечити необхідні параметри системи, які характеризують ефективність роботи КОС. На сьогодні вже досліджено основні фізичні основи роботи КОС, які докладно описані в багатьох монографіях та статтях [12, 34, 35]. Проте ще не до кінця розроблені та вдосконалені методи проектування оптичних систем, що лежать в основі таких спектроаналізаторів.

6.2.1. Основні характеристики когерентних спектроаналізаторів

Визначення узагальнених характеристик КОС

Ефективність використання КОС для розв'язання тієї чи іншої задачі можна оцінити за допомогою основних його характеристик. Основними

характеристиками КОС, що визначають їх властивості та функціональні можливості, є:

- робочий діапазон просторових частот;
- просторова смуга пропускання;
- просторова спектральна роздільна здатність;
- енергетична роздільна здатність.

Робочий діапазон просторових частот – це діапазон просторових частот, в межах якого всі частотні складові досліджуваного спектра пропускатимуться оптичною системою КОС. Діапазон просторових частот, що пропускається системою, буде залежати від діаметра вхідної зіниці об'єктива. На певній просторовій частоті $\nu_{x,max}$ досліджуваний спектр зникатиме. Ця максимальна просторова частота й буде визначати робочий просторовий спектральний діапазон.

Просторова смуга пропускання SBP (Space Bandwidth Product), яка визначається числом роздільних точок, яке здатний формувати спектроаналізатор [28]. Ця смуга є аналогом робочого спектрального діапазону. Найбільша просторова частота $\nu_{x,max} = \nu_{res}$, яку розділяє КОС, визначається найбільшим кутом дифракції $\varphi_d = \theta_{max}$ ґратки, яка розташована в площині вхідного транспаранта. При нормальному падінні плоскої хвилі на дифракційну ґратку, яка розташована в передній фокальній площині фур'є-об'єктива, для першого порядку дифракції із основного рівняння ґратки маємо $d \sin \varphi_{d1} = \lambda$, де $d = 1/\nu_{res}$ – період дифракційної ґратки. Звідки

$$\nu_{res} = \frac{1}{d} = \frac{1}{\lambda} \sin \theta_{max}. \quad (6.28)$$

Тоді просторова смуга пропускання спектроаналізатори дорівнює:

$$SBP = \frac{D_o}{d} = D_o \nu_{res} = \frac{D_o}{\lambda} \sin \varphi_{d1}, \quad (6.29)$$

де D_o – діаметр вхідного транспаранта.

Просторова спектральна роздільна здатність $\Delta \nu_x$ характеризується інтервалом частот, при яких система може розрізняти (розділяти) дві

спектральні складові однакової амплітуди з частотами ν_x та $\nu_x + \Delta\nu_x$. Оскільки вихідний сигнал реєструється матричним приймачем випромінювання (ПВ), то спектральна роздільна здатність системи визначається, перш за все, розмірами чутливої площадки (пікселя).

Енергетична роздільна здатність служить для оцінки здатності матричного ПВ виявляти сигнали об'єктів на фоні шумів. Основним критерієм, що визначає енергетичну роздільну здатність, є поріг чутливості ПВ. Порогом чутливості називають найменший потік випромінювання або найменшу освітленість, які можуть бути зареєстровані приймальною системою. Йому відповідає такий мінімальний рівень сигналу, при якому на виході ПВ відношення сигнал/шум дорівнює одиниці.

Методика розрахунку характеристик КОС

При проектуванні КОС важливо забезпечити необхідні наведені вище характеристики. Розглянемо методику розрахунку характеристик для більш поширеної схеми, коли вхідний транспарант розташований в передній фокальній площині об'єктива (рис. 6.2). В якості вхідного транспаранта візьмемо екран з прямокутним отвором, що має розмір $a \times b$ та коефіцієнт пропускання $t_o(x_1, y_1)$.

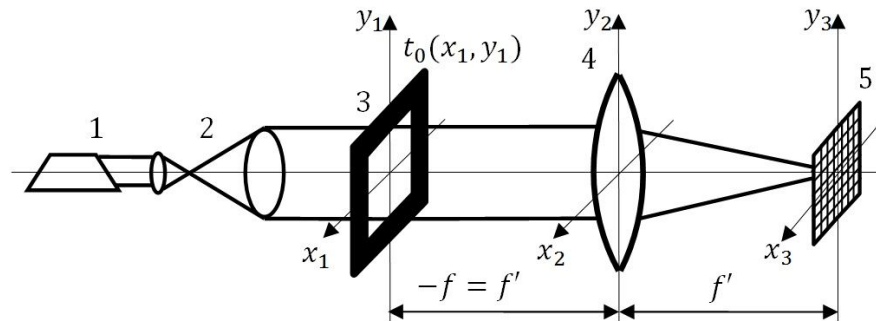


Рис. 6.2. Схема КОС: 1– лазер; 2– оптична система, що формує паралельний пучок променів; 3– вхідний транспарант прямокутної форми; 4– Фур'є-об'єктив; 5– ПЗЗ-матриця

Нехай на вхідний транспарант падає плоска монохроматична хвиля, в результаті чого на транспаранті буде спостерігатись дифракція. Тому розподіл поля в площині ПВ визначається за формулою (3.36), яку для схеми, представленої на рис. 6.2, подамо у вигляді

$$V(x_3, y_3) = \frac{1}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x_1, y_1) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_3 x_1 + y_3 y_1) \right] dx_1 dy_1, \quad (6.30)$$

де λ – довжина хвилі; f – фокусна відстань Фур'є-об'єктива; $V(x_1, y_1)$ – розподіл поля в площині транспаранта; x_1, y_1 і x_3, y_3 – просторові координати в площині $x_1 y_1$ та $x_3 y_3$ відповідно.

Просторовий спектр функції $V(x_1, y_1)$ визначається двовимірним перетворенням Фур'є:

$$F\{V(x_1, y_1)\} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} V(x_1, y_1) \exp[-j2\pi(\nu_x x_1 + \nu_y y_1)] dx_1 dy_1, \quad (6.31)$$

де ν_x, ν_y – просторові частоти.

Порівнюючи вирази (6.30) і (6.31), можна відмітити, що просторові частоти будуть дорівнювати:

$$\nu_x = \frac{x_3}{\lambda f}; \quad \nu_y = \frac{y_3}{\lambda f}. \quad (6.32)$$

Розподіл інтенсивності поля у площині аналізу $x_3 y_3$ дорівнює квадрату модуля спектра Фур'є-образу: $I(x_3, y_3) = |V(x_3, y_3)|^2$.

Розглянемо одновимірний розподіл поля уздовж осі x . Для того, щоб знайти робочий діапазон просторових частот скористаємось законами геометричної оптики. Оптична система КОС пропускає просторові частоти тільки в межах від 0 до $\nu_{x,max}$. Розглянемо таке проходження променя через Фур'є-об'єктив, при якому буде пропускатись максимальна просторова частота (рис. 6.3).

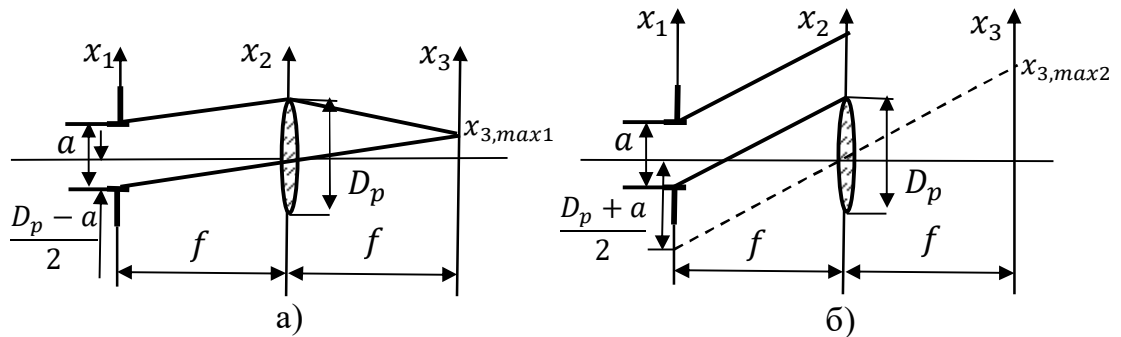


Рис. 6.3. Проходження променя через Фур'є-об'єктив:
а – віньєтування відсутнє; б – віньєтування змінюється від 1 до 0

Із рис. 6.3 видно, що граничні просторові частоти будуть дорівнювати:

$$\nu_{x,max1} = \frac{x_{3,max1}}{\lambda f} = \frac{D_p - a}{2\lambda f}; \quad \nu_{x,max2} = \frac{x_{3,max2}}{\lambda f} = \frac{D_p + a}{2\lambda f}, \quad (6.33)$$

де D_p – діаметр вхідної зіниці Фур’є-об’єктива.

При цьому необхідно відзначити, що в спектральному діапазоні від 0 до $\nu_{x,max1}$ вінетування в системі відсутнє, а в межах від $\nu_{x,max1}$ до $\nu_{x,max2}$ – змінюється від 1 до 0. За межами просторової частоти $\nu_{x,max2}$ сигнал буде відсутній.

Для визначення просторової смуги пропускання SBP розглянемо рис. 6.3,а, із якого знаходимо максимальний кут дифракції першого порядку φ_{d1} , при якому відсутнє вінетування

$$\operatorname{tg} \varphi_{d1} = \frac{D_p - a}{2f}; \rightarrow \varphi_{d1} = \operatorname{arctg} \frac{D_p - a}{2f}. \quad (6.34)$$

Після підстановки (6.34) в (6.29) отримаємо

$$SBP = \frac{a}{\lambda} \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{D_p - a}{2f} \right) = \frac{a}{\lambda}. \quad (6.35)$$

Для малих кутів дифракції маємо

$$SBP = \frac{a}{\lambda} \left(\frac{D_p - a}{2f} \right). \quad (6.36)$$

Дослідження функції (6.36) на екстремум показує, що КОС має максимальну просторову смугу пропускання, коли $D_p = 2a$, тобто розмір вхідного транспаранта дорівнює радіусу вхідної зіниці Фур’є-об’єктива.

Знайдемо мінімальний просторовий спектр вхідного сигналу, що розрізняється одним пікселем. Нехай піксель матриці має розмір $V_D \times W_D$. Враховуючи просторову частоту, що визначається формулою (6.32), та розмір пікселя, знайдемо просторову спектральну роздільну здатність:

$$\Delta \nu_x = \nu_{x2} - \nu_{x1} = \frac{x_3}{\lambda f} - \frac{x_3 - 2V_D}{\lambda f} = \frac{2V_D}{\lambda f}, \quad (6.38)$$

де ν_x і ν_{x2} – просторові частоти, що відповідають положенню сусідніх гармонік, що розділяються (спостерігаються окремо).

Метою енергетичного розрахунку є визначення величини електричного сигналу та відношення сигнал/шум на виході ПЗЗ-матриці в залежності від просторової частоти вхідного оптичного сигналу.

Для цього необхідно вибрати еталонний оптичний сигнал, який має відомий просторовий спектр. Такий сигнал може мати будь-який вхідний транспарант. В якості еталонного сигналу можна використати щілину, прямокутний отвір, одновимірну синусоїдальну функцію амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта, одновимірну прямокутну функцію пропускання вхідного транспаранта, тощо.

В якості еталонного тест-об'єкта оберемо прямокутний отвір розміром $a \times b$, просторовий спектр якого описується sinc-функціями (рис. 6.4).

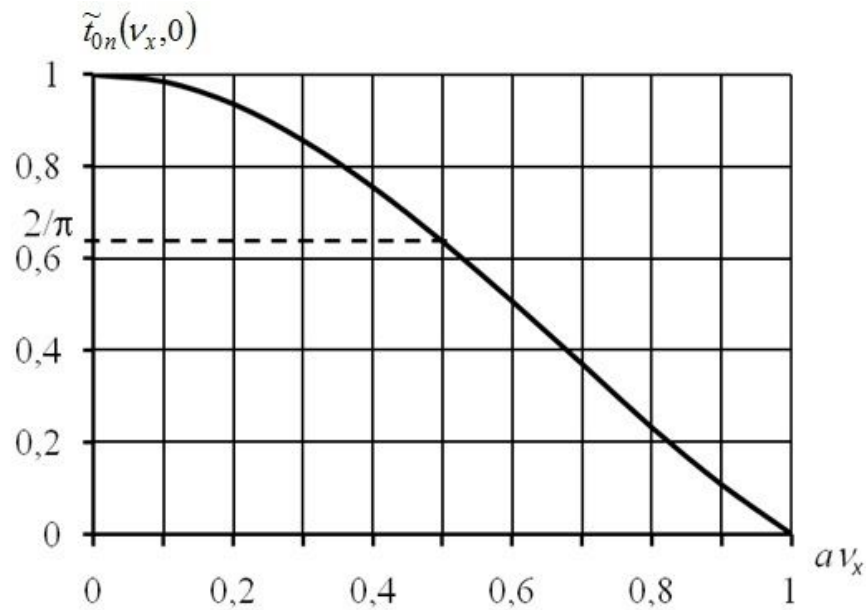


Рис. 6.4. Одновимірний нормований просторовий спектр $\tilde{t}_o(v_x, v_y)$ пропускання прямокутного отвору

Недоліком цього сигналу є те, що амплітуда світлового поля в певній точці аналізу залежить від розмірів отвору $a \times b$, що не дозволяє розповсюдити результати енергетичного розрахунку для довільних вхідних сигналів.

Визначимо сигнал u_s та відношення сигнал/шум SNR на частоті Найквіста $v_N = 1/2a$. Такий підхід широко використовується при визначенні просторового розділення телевізійних і тепловізійних цифрових камер [6]. За таких умов частота Найквіста v_N в площині аналізу x_3y_3 має координати:

$$x_{3N} = \frac{\lambda f}{2a}. \quad (6.39)$$

Визначимо значення просторового спектру прямокутного отвору на частоті Найквіста. Амплітудний коефіцієнт пропускання такого отвору визначається функцією:

$$t_o(x_1, y_1) = \begin{cases} 1, \text{ коли } |x_1| \leq \frac{a}{2}, |y_1| \leq b/2; \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.40)$$

Просторовий спектр функції (6.40) знаходиться за допомогою двовимірного перетворення Фур'є [6]:

$$\tilde{t}_o(v_x, v_y) = F\{t_o(x_1, y_1)\} = ab \frac{\sin(\pi a v_x)}{\pi a v_x} \frac{\sin(\pi b v_y)}{\pi b v_y} = ab \operatorname{sinc}(a v_x) \operatorname{sinc}(b v_y). \quad (6.41)$$

де $\operatorname{sinc} z = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$ – sinc-функція.

В точці (0,0) маємо $\tilde{t}_o(0, 0) = ab$. Нормований спектр визначаємо як:

$$\tilde{t}_{on}(v_x, v_y) = \frac{\tilde{t}_o(v_x, v_y)}{\tilde{t}_o(0,0)} = \operatorname{sinc}(a v_x) \operatorname{sinc}(b v_y). \quad (6.42)$$

Одновимірний нормований спектр на частоті Найквіста має значення:

$$\tilde{t}_{on}(v_x, 0) = \operatorname{sinc}(a v_N) = \frac{\sin(\pi a \frac{1}{2a})}{\pi a \frac{1}{2a}} = \frac{2}{\pi}. \quad (6.43)$$

Це означає, що на частоті Найквіста спектр сигналу зменшується в $\pi/2$ рази відносно максимального значення.

Розглянемо послідовність перетворення випромінювання від лазера до площини аналізу, що представлена на рис. 6.2.

Нехай освітлювана система створює плоску монохроматичну хвилю з амплітудою V_0 , яка нормально падає на вхідний транспарант. Тоді амплітуда поля за транспарантом:

$$V(x_1, y_1) = V_0 t_o(x_1, y_1), \quad (6.44)$$

де амплітудний коефіцієнт пропускання транспаранта $t_o(x_1, y_1)$ описується функцією (6.7).

$$V(x_3, y_3) = \frac{V_0}{\lambda f} F\{t_o(x_1, y_1)\} = \frac{V_0 ab}{\lambda f} \operatorname{sinc}(a v_x) \operatorname{sinc}(b v_y). \quad (6.45)$$

Тоді з врахуванням коефіцієнта пропускання об'єктива τ_o освітленість в площині $x_3 y_3$, де встановлена ПЗЗ-матриця, дорівнює:

$$E(x_3, y_3) = \tau_o E_0 \left(\frac{ab}{\lambda f} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{ax_3}{\lambda f} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{by_3}{\lambda f} \right), \quad (6.46)$$

де $E_0 = |V_0|^2$ – освітленість вхідного транспаранта.

Формула (6.46) не враховує вільного випромінювання, яке практично відсутнє при малих розмірах тест-об'єкта, тобто коли $\sqrt{a^2 + b^2} \ll D_p$.

Для аналізу розподілу освітленості $E(x_3, y_3)$ будемо використовувати ПЗЗ-матрицю, яка має такі параметри: спектральна чутливість $R_D(\lambda)$, В·см²/мкДж; величина середньоквадратичного значення шумового сигналу u_n , мкВ; час накопичення T_i , мс; формат матриці $p \times q$; розмір пікселя $V_D \times W_D$, мкм²; розмір матриці $X_D \times Y_D$, мм².

Знайдемо величину експозиції, яку забезпечує освітленість (6.46):

$$H(x_3, y_3) = E(x_3, y_3)T_i. \quad (6.47)$$

Тоді сигнал на виході пікселя дорівнює:

$$u_s = R_D H(x_3, y_3) = R_D E(x_3, y_3)T_i, \quad (6.48)$$

де R_D – чутливість ПВ на довжині хвилі λ .

Відношення сигнал/шум визначається як:

$$SNR = \frac{u_s}{u_n}. \quad (6.49)$$

Таким чином, на основі наведених методів розрахунку узагальнених характеристик КОС, коли вхідний транспарант розташований перед Фур'є-об'єктивом, можна зробити наступні висновки:

- 1) Робочий діапазон просторових частот обмежується параметрами оптичної системи КОС. Гранична максимальна просторова частота тим більша, чим більший діаметр апертурної діафрагми об'єктива та менша його фокусна відстань. Одночасно треба враховувати розміри матричного ПВ, від якого також залежить шуканий діапазон.
- 2) Підвищити просторову спектральну роздільну здатність, тобто зменшення $\Delta \nu_x$, можливо вибором ПВ з меншими розмірами пікселя та збільшенням фокусної відстані Фур'є-об'єктива.
- 3) Енергетична роздільна здатність залежить від параметрів ПВ та відносного отвору Фур'є-об'єктива, тобто чим більший відносний отвір

Фур'є-об'єктива, тим вищу енергетичну роздільну здатність матиме прилад.

6.2.2. Енергетичний розрахунок когерентного оптичного спектроаналізатора

Енергетичний розрахунок є одним із важливих етапів проектування оптичних систем спектроаналізаторів. Метою енергетичного розрахунку є визначення освітленості у площині аналізу і параметрів сигналу на виході фотореєстратора (ПЗЗ-матриці) для оцінювання метрологічних можливостей когерентного оптичного спектроаналізатора (КОС). Теоретичні основи енергетичного розрахунку викладено в підручнику [36].

У підрозділі 6.1 було обґрунтовано, що кращою для практичного використання є оптична система КОС, яка побудована за схемою, коли вхідний транспарант розміщений перед Фур'є-об'єктивом (рис. 6.5). Саме в цій системі вилучено квадратичні фазові спотворення спектра сигналу, а юстуванням оптичної системи досягається мінімум спотворень його просторових та енергетичних параметрів [33].

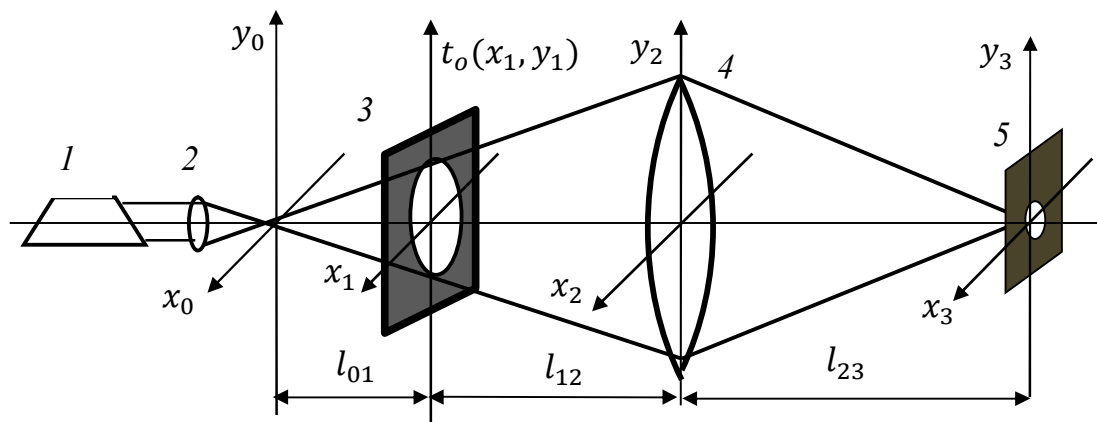


Рис. 6.5. Схема оптичної системи когерентного спектроаналізатора із вхідним транспарантом перед Фур'є-об'єктивом: 1 – лазер; 2 – фокусувальна лінза; 3 – вхідний транспарант; 4 – фур'є-об'єктив; 5 – польова діафрагма фотоприймача

Модель формування спектрального розподілу. Як вихідні дані для енергетичного розрахунку оберемо такі параметри:

- для лазера – потужність потоку випромінювання Φ_l , довжину хвилі λ ,

радіус r_l перетяжки гауссового пучка випромінювання;

- для вхідного транспаранта – радіус польової діафрагми r_{oa} ;
- для оптичної системи – відстань $l_{i-1,i}$ між компонентами, фокусну відстань f і діаметр вхідної зіниці D_p фур'є-об'єктива;
- для приймача випромінювання – інтегральну чутливість R_D , середню квадратичну напругу шумів u_{Dn} , радіус польової діафрагми r_D .

Розподіл комплексної амплітуди світлової хвилі у площині спектрального аналізу $x_3 y_3$ КОС пропорційний просторовому спектру вхідного сигналу й описується співвідношенням (6.18), яке подамо у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_3, y_3) &= C'_0 F\{t_o(x_1, y_1) t_{oa}(x_1, y_1) V(x_1, y_1)\} = \\ &= C'_0 F\{t_o(x_1, y_1)\} \otimes \otimes F\{t_{oa}(x_1, y_1) V(x_1, y_1)\} = \\ &= C'_0 T_o(\mu x_3, \mu y_3) \otimes \otimes F\{t_{oa}(x_1, y_1) V(x_1, y_1)\}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

де C'_0 – фазовий множник; $F\{ \}$ – оператор перетворення Фур'є з масштабним коефіцієнтом μ , який визначається за формулою (6.20); $\otimes \otimes$ – оператор двовимірної згортки; $t_{oa}(x_1, y_1)$ – функція, що описує форму апертури вхідного транспаранта, який обмежує розміри просторового сигналу $t_o(x_1, y_1)$, що піддається аналізу; $V(x_1, y_1)$ – амплітуда поля на вході транспаранта; $T_o(\mu x_3, \mu y_3)$ – ідеальний спектр сигналу.

Із співвідношення (6.50) видно, що спектр вихідного сигналу $V(x_3, y_3)$ дорівнює згортці ідеального спектра сигналу $T_o(\mu x_3, \mu y_3)$ з імпульсним відгуком $h_{sa}(\mu x_3, \mu y_3)$ КОС. У свою чергу, імпульсний відгук $h_{sa}(\mu x_3, \mu y_3)$ КОС являє собою перетворення Фур'є від розподілу амплітуди світлової хвилі у площині апертури вхідного транспаранта, тобто

$$h_{sa}(\mu x_3, \mu y_3) = C'_0 F\{t_{oa}(x_1, y_1) V(x_1, y_1)\}. \quad (6.51)$$

Нехай вхідний транспарант обмежений круглою апертурою радіусом r_{oa} й освітлюється лазерним пучком з гауссовим розподілом амплітуди. Тоді

$$t_{oa}(x_1, y_1) = t_{oa}(r_1) = \begin{cases} 1, & \text{коли } r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq r_{oa}; \\ 0 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \quad (6.52)$$

$$V(x_1, y_1) = V(r_1) = V_0 \frac{r_{l0}}{r_l} \exp\left(-\frac{r_1^2}{r_l^2}\right), \quad (6.53)$$

де r_l – радіус лазерного пучка у площині вхідного транспаранта; V_0 – амплітуда світлової хвилі у площині x_0y_0 ; r_{l0} – радіус перетяжки лазерного пучка у площині x_0y_0 .

Оскільки функції $t_{oa}(r_1)$ і $V(r_1)$ є вісесиметричними, то імпульсний відгук (6.51) варто визначати як одновимірне перетворення Фур’є–Бесселя, тобто

$$h_{sa}(\mu r_3) = 2\pi C'_0 \int_0^\infty t_{oa}(r_1) V(r_1) J_0(2\pi \mu r_3 r_1) r_1 dr_1. \quad (6.54)$$

Підставимо функції (6.52) і (6.53) до інтеграла (6.54):

$$h_{sa}(\mu r_3) = 2\pi C'_0 V_0 \frac{r_{l0}}{r_l} \int_0^{r_{oa}} \exp\left(-\frac{r_1^2}{r_l^2}\right) J_0(2\pi \mu r_3 r_1) r_1 dr_1. \quad (6.55)$$

Для обчислення інтеграла (6.55) скористаємося табличним інтегралом 1.8.2.4 із довідника [38]:

$$\int_0^z x^{\nu+1} e^{ax^2} J_\nu(bx) dx = \frac{b^\nu e^{az^2}}{(2ja)^{\nu+1}} \times \\ \times [U_{\nu+1}(2jaz^2, bz) - jU_{\nu+2}(2jaz^2, bz)], \quad (6.56)$$

де $U_\nu(y, \xi)$ – функція Ломмеля двох змінних,

$$U_\nu(y, \xi) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{y}{\xi}\right)^{2k+\nu} J_{2k+\nu}(\xi). \quad (6.57)$$

Зробимо заміну в інтегралі (6.56): $\nu = 0$; $z = r_{oa}$; $a = -\frac{1}{r_l^2}$; $b = 2\pi \mu r_3$, тоді інтеграл (6.55) з урахуванням табличного інтеграла (6.56) перетворюється до вигляду

$$h_{sa}(\mu r_3) = 2\pi C'_0 V_0 \frac{r_{l0}}{r_l} \frac{\exp\left(-\frac{r_{oa}^2}{r_l^2}\right)}{2ja} \times \\ \times \left[U_1\left(-\frac{2j}{r_l^2} r_{oa}^2, 2\pi \mu r_3 r_{oa}\right) - jU_2\left(-\frac{2j}{r_l^2} r_{oa}^2, 2\pi \mu r_3 r_{oa}\right) \right]. \quad (6.58)$$

Після підстановки функції Ломмеля (6.57) у формулу (6.58) і виконання математичних перетворень отримаємо функцію, яка відповідає імпульсному відгуку КОС,

$$h_{sa}(\mu r_3) = \pi C'_0 V_0 r_{l0} r_l \exp\left(-\frac{r_{oa}^2}{r_l^2}\right) \sum_{k=1}^\infty \left(2 \frac{r_{oa}^2}{r_l^2}\right)^k \frac{J_k(2\pi \mu r_{oa} r_3)}{(2\pi \mu r_{oa} r_3)^k}. \quad (6.59)$$

Аналіз вихідного сигналу когерентного оптичного спектроаналізатора. Результати чисельного аналізу імпульсного відгуку КОС (6.59), виконаного за допомогою комп'ютера, подано на рис. 6.6. Із графіків видно, що зі збільшенням нерівномірності освітленості апертури вхідного транспаранта, яка визначається відношенням r_{oa}/r_l , відбувається розширення імпульсного відгуку КОС. Якщо $\frac{r_{oa}}{r_l} < 1$, внесок доданків у виразі (6.59) зменшується зі зростанням їх порядкового номера k . Дослідження функції (6.59) показали, що для випадку, коли $\frac{r_{oa}}{r_l} < 0,7$, цю функцію можна записати лише у вигляді суми двох доданків, тобто

$$h_{sa}(\mu r_3) = \pi C'_0 V_0 r_{l0} r_l \exp\left(-\frac{r_{oa}^2}{r_l^2}\right) \times \\ \times 2 \frac{r_{oa}^2}{r_l^2} \left[\frac{J_1(2\pi\mu r_{oa} r_3)}{2\pi\mu r_{oa} r_3} + 2 \frac{r_{oa}^2}{r_l^2} \frac{J_2(2\pi\mu r_{oa} r_3)}{(2\pi\mu r_{oa} r_3)^2} \right]. \quad (6.60)$$

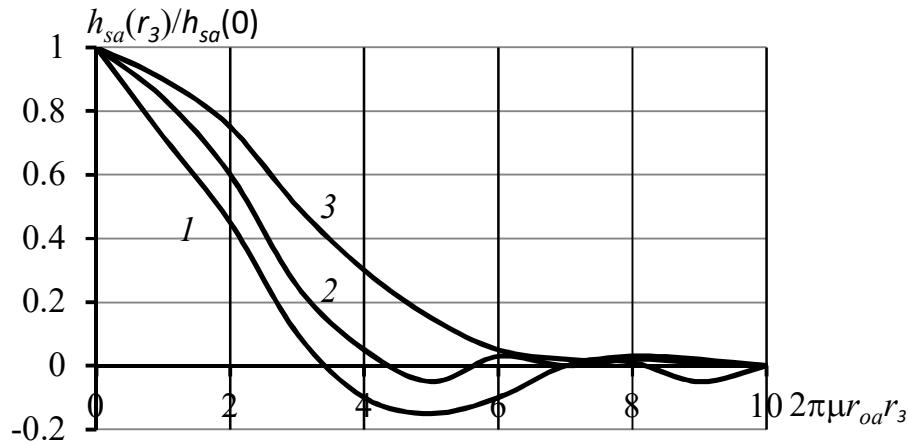


Рис. 6.6. Залежність форми імпульсного відгуку від нерівномірності освітленості вхідного транспаранта: 1 – $r_{oa}/r_l = 0$; 2 – $r_{oa}/r_l = 1$; 3 – $r_{oa}/r_l = 2$

Будь-яку функцію, що задовольняє умови Дирихле, можна подати у вигляді інтеграла Фур'є, тобто у вигляді нескінченної суми гармонічних складових. Тому досліджуватимемо реакцію КОС, що має імпульсний відгук (6.59), на вхідний сигнал у вигляді амплітудної синусоїдальної дифракційної ґратки необмежених розмірів із просторовою частотою ν_0 , амплітудний коефіцієнт пропускання якої описується функцією

$$t_o(x_1, y_1) = t_{o0} + t_{o1} \cos(2\pi\nu_0 x_1), \quad (6.61)$$

де t_{o0} – постійна складова; t_{o1} – амплітуда гармонічної складової.

Просторовий спектр дифракційної ґратки (6.61) у площині x_3, y_3 описується функцією, яка була отримана у розділі 2:

$$T_o(\mu x_3, \mu y_3) = \delta(\mu y_3) \times \left\{ t_{o0} \delta(\mu x_3) + \frac{1}{2} t_{o1} [\delta(\mu x_3 + \nu_0) + \delta(\mu x_3 - \nu_0)] \right\}, \quad (6.62)$$

де $\delta(z)$ – дельта-функція.

Підставимо функцію (6.62) у рівняння (6.50). Використовуючи імпульсний відгук (6.59) і фільтрувальну властивість дельта-функції, отримаємо розподіл амплітуди поля для одного із бокових максимумів:

$$V_{m1}(x_3, y_3) = \frac{1}{2} t_{o1} \pi C'_0 V_0 r_{l0} r_l \exp\left(-\frac{r_{oa}^2}{r_l^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \frac{r_{oa}^2}{r_l^2}\right)^k \frac{J_k\left[2\pi r_{oa} \sqrt{(\mu x_3 - \nu_0)^2 + (\mu y_3)^2}\right]}{\left[2\pi r_{oa} \sqrt{(\mu x_3 - \nu_0)^2 + (\mu y_3)^2}\right]^k}. \quad (6.63)$$

Сигнал на виході приймача випромінювання. Розглянемо методику розрахунку електричного сигналу на виході приймача випромінювання, чутлива площа якого обмежена круглою діафрагмою радіусом r_D . Визначимо амплітуду сигналу в центрі дифракційного максимуму (6.63). Коефіцієнт пропускання польової діафрагми ПВ, центр якої збігається з положенням максимуму $\left(\frac{\nu_0}{\mu}, 0\right)$, визначається функцією

$$t_D(x_3, y_3) = \begin{cases} 1, & \text{коли } \left(x_3 - \frac{\nu_0}{\mu}\right)^2 + y_3^2 \leq r_D^2; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.64)$$

Для польової діафрагми (6.64) вихідний сигнал ПВ

$$u_D = 2\pi R_D \int_0^{r_D} E(r'_3) r'_3 dr'_3, \quad (6.65)$$

де r'_3 – радіус полярної системи координат, центр якої збігається з центром

бокового максимуму (6.63), $r'_3 = \sqrt{\left(x_3 - \frac{\nu_0}{\mu}\right)^2 + y_3^2}$; R_D – інтегральна

чутливість ПВ; $E(r'_3)$ – освітленість чутливої площадки ПВ, $E(r'_3) = |V(r'_3)|^2$.

Підставимо функцію (6.63) в інтеграл (6.65):

$$u_{D,m1} = 2\pi R_D \left(\frac{1}{2} t_{o1} \pi C'_0 V_0 r_{l0} r_l \right)^2 \exp \left(-2 \frac{r_{oa}^2}{r_l^2} \right) \times \\ \times \int_0^{r_D} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \frac{r_{oa}^2}{r_l^2} \right)^k \frac{J_k \left[2\pi r_{oa} \sqrt{(\mu x_3 - \nu_0)^2 + (\mu y_3)^2} \right]}{\left[2\pi r_{oa} \sqrt{(\mu x_3 - \nu_0)^2 + (\mu y_3)^2} \right]^k} \right\}^2 r'_3 dr'_3. \quad (6.66)$$

Вираз (6.66) значно спрощується для випадків рівномірного освітлення вхідного транспаранта, коли $\frac{r_{oa}}{r_l} < 0,2$, і гауссового освітлення, коли $\frac{r_{oa}}{r_l} > \sqrt{2}$.

Для рівномірного освітлення функцію (6.66) можна записати лише у вигляді суми двох доданків аналогічно виразу (6.60). Використавши табличний інтеграл 1.8.3.5 із довідника [38],

$$\int x^{1\pm\nu} J_\nu^2(x) dx = \frac{1}{2(1\pm 2\nu)} x^{2\pm 2\nu} [J_{\nu\pm 1}^2(x)],$$

отримаємо функцію

$$u_{D,m1} = \frac{\pi}{4} R_D \left(\frac{t_{o1} C'_0 V_0 r_{l0}}{\mu} \right)^2 \frac{r_{oa}^2}{r_l^2} [1 - J_0^2(2\pi r_{oa} r_D) - J_1^2(2\pi r_{oa} r_D)]. \quad (6.67)$$

Для гауссового освітлення функцію (6.66) можна записати лише у вигляді

$$u_{D,m1} = 2\pi R_D \left(\frac{1}{2} t_{o1} \pi C'_0 V_0 r_{l0} r_l \right)^2 \int_0^{r_D} \exp[-2(\pi \mu r_l r'_3)^2] r'_3 dr'_3. \quad (6.68)$$

Використавши табличний інтеграл 1.3.3.7 із довідника [4],

$$\int_0^z x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} (1 - e^{-az^2}),$$

функцію (6.68) запишемо у вигляді

$$u_{D,m1} = \frac{\pi}{2} R_D \left(\frac{t_{o1} C'_0 V_0 r_{l0}}{\mu} \right)^2 \{1 - \exp[-2(\pi \mu r_l r_D)^2]\}. \quad (6.69)$$

Графіки залежностей вихідного сигналу ПВ $u_{D,m1}$ від радіуса r_D польової діафрагми, які визначаються функціями (6.67) і (6.69), зображено на рис. 6.7. Аналіз цих функцій показує, що зі збільшенням радіуса r_D величина вихідного сигналу $u_{D,m1}$ збільшується. Для гауссового освітлення вхідного транспаранта сигнал ПВ перевищує сигнал, утворений рівномірним освітленням транспаранта.

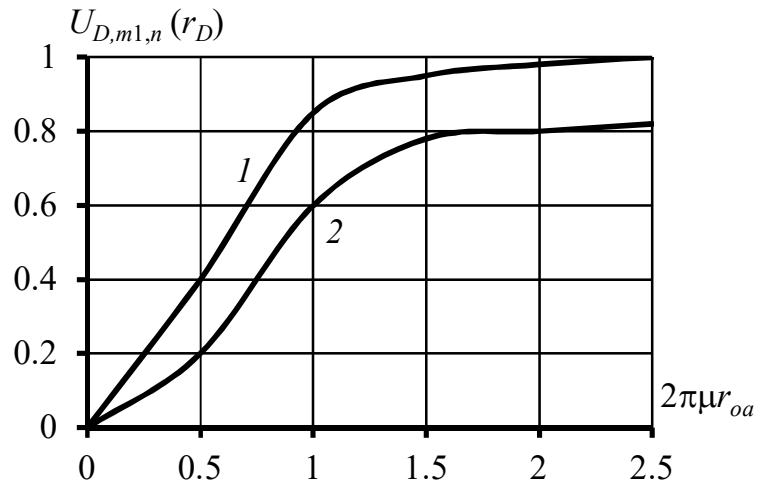


Рис. 6.7. Залежність нормованого вихідного сигналу КОС
 $u_{D,m1,n}(r_D) = u_{D,m1}(r_D)/u_{D,m1}(\infty)$ від радіуса r_D польової діафрагми ПВ:
 $1 - r_{oa}/r_{l0} = 0,2$; $2 - r_{oa}/r_{l0} = \sqrt{2}$

На виході ПВ, крім корисного (інформативного) сигналу $u_{D,m1}$, завжди спостерігається шумовий сигнал U_{Dn} . Для достовірного вимірювання сигналу $u_{D,m1}$ потрібно забезпечити задане відношення сигнал/шум (Signal Noise Ratio) $SNR = \frac{u_{D,m1}}{u_{Dn}}$, тобто

$$u_{D,m1, \min} \geq SNR u_{Dn}. \quad (6.70)$$

Отже, використовуючи функції (6.67) і (6.69), або їх графіки, зображені на рис. 6.7, з умови (6.70) можна визначити мінімальну величину $t_{o1, \min}$ спектральної складової вхідного сигналу, яку можна виміряти за допомогою КОС за заданих йому конструктивних параметрів.

6.2.3. Роздільна здатність когерентного оптичного спектроаналізатора

Імпульсний відгук КОС під час освітлення вхідного транспаранта квазімонохроматичним випромінюванням. Використання КОС у промисловій апаратурі ставить перед дослідниками та конструкторами завдання зменшення розмірів їх оптичної системи, що може бути успішно досягнуто застосуванням мініатюрних напівпровідникових лазерів як джерел когерентного випромінювання [37]. Але використання напівпровідникових лазерів у КОС має ряд особливостей, пов'язаних з обмеженою когерентністю

та значним кутом розбіжності лазерного пучка, а тому потребує додаткових досліджень форми імпульсного відгуку КОС для квазімонохроматичного освітлення вхідного транспаранта.

Розглянемо схему оптичної системи КОС із вхідним транспарантом, розміщеним перед фур'є-об'єктивом, яка зображена на рис. 6.8. У такій системі вхідний транспарант освітлюється розбіжною світловою хвилюю, а його просторовий спектр описується виразом (6.18), який подамо у вигляді

$$V(x_3, y_3) = C_0 \iint_{-\infty}^{\infty} V(x_1, y_1) t_o(x_1, y_1) \exp[-j2\pi\mu(x_3x_1 + y_3y_1)] dx_1 dy_1, \quad (6.71)$$

де C_0 – фазовий коефіцієнт, що визначається геометричними розмірами оптичної системи; μ – коефіцієнт масштабування спектра, $\mu = 1/\lambda_0 l_{23}$; $V(x_1, y_1)$ – розподіл амплітуди світлового поля, що освітлює вхідну площину КОС; $t_o(x_1, y_1)$ – амплітудний коефіцієнт пропускання вхідного транспаранта. У свою чергу, під час квазімонохроматичного освітлення вхідного сигналу амплітуда світлової хвилі змінюється у часі, тобто

$$V(x_1, y_1, t) = V(x_1, y_1) a(t), \quad (6.72)$$

де $a(t)$ – амплітуда коливань хвилі з частотою ν_0 у момент часу t .

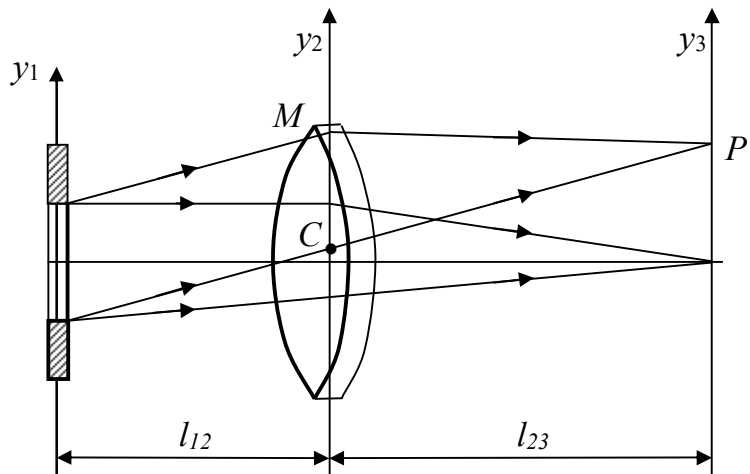


Рис. 6.8. Схема формування просторового спектра в КОС

Визначимо імпульсний відгук КОС, в якому використовується квазімонохроматичне джерело випромінювання. Розподіл інтенсивності поля у спектральній площині КОС може бути визначений за теоремою Хіллі з

урахуванням того, що інтервал часу t_i реєстрації (інтегрування) світлового поля у багато разів перевищує період коливань світлової хвилі, тобто

$$\begin{aligned}
 E(x_3, y_3) &= \langle V(x_1, y_1, t) V^*(x_1, y_1, t + t_i) \rangle = \\
 &= \lim_{t_i \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_i} \int_{-t_i}^{t_i} V(x_1, y_1, t) V^*(x_1, y_1, t + t_i) dt = \\
 &= \lim_{t_i \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_i} \int_{-t_i}^{t_i} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} V(x_1, y_1) a(t) t_o(x_1, y_1) \times \right. \\
 &\quad \times \exp[-j2\pi\mu(x_3x_1 + y_3y_1)] dx_1 dy_1 \times \\
 &\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} V^*(x'_1, y'_1) a^*(t + \Delta t) t_o^*(x'_1, y'_1) \times \\
 &\quad \times \exp[j2\pi\mu(x_3x'_1 + y_3y'_1)] dx'_1 dy'_1, \quad (6.73)
 \end{aligned}$$

де Δt – різниця часу, необхідна двом променям для того, щоб прийти із точок M і

C в точку P' : $\Delta t = \frac{CP'' - MP'}{c}$, де c – швидкість світла.

Визначимо відстані CP' і MP' для параксiальної області:

$$\begin{aligned}
 CP' &= \sqrt{(x_{3P} - x_{2C})^2 + (y_{3P} - y_{2C})^2 + l_{23}^2} = \\
 &= l_{23} \sqrt{1 + \frac{(x_{3P} - x_{2C})^2 + (y_{3P} - y_{2C})^2}{l_{23}^2}} \approx \\
 &\approx l_{23} \left[1 + \frac{(x_{3P} - x_{2C})^2 + (y_{3P} - y_{2C})^2}{2l_{23}^2} \right], \quad (6.74)
 \end{aligned}$$

де (x_{2C}, y_{2C}) і (x_{3P}, y_{3P}) – координати точок C і P' відповідно.

Аналогічно

$$MP' \approx l_{23} \left[1 + \frac{(x_{3P} - x_{2M})^2 + (y_{3P} - y_{2M})^2}{2l_{23}^2} \right]. \quad (6.75)$$

З урахуванням наближень (6.74) і (6.75) часовий інтервал

$$\begin{aligned}
 \Delta t &= \frac{1}{2cl_{23}} \{ [(x_{3P} - x_{2C})^2 - (x_{3P} - x_{2M})^2] + \\
 &\quad + [(y_{3P} - y_{2C})^2 - (y_{3P} - y_{2M})^2] \} \approx \\
 &\approx \frac{1}{cl_{23}} \{ x_{3P}(x_{2M} - x_{2C}) + y_{3P}(y_{2M} - y_{2C}) \} = \\
 &= \frac{1}{cl_{23}} (x_{3P}\Delta x_2 + y_{3P}\Delta y_2), \quad (6.76)
 \end{aligned}$$

де $\Delta x_2 = x_{2M} - x_{2C}$; $\Delta y_2 = y_{2M} - y_{2C}$.

Оскільки від площини x_1y_1 до площини x_2y_2 у параксiальній області дифрагований світловий пучок поширюється у вигляді плоских хвиль, то можна вважати, що $\Delta x_2 = \Delta x_1$ і $\Delta y_2 = \Delta y_1$. Згідно з монографією [39] з урахуванням

співвідношення (6.76) маємо, що

$$\begin{aligned}\langle a(t)a^*(t + \Delta t) \rangle &= \langle a(t)a^* \left[t + \frac{1}{cl_{23}} (x_{3P}\Delta x_2 + y_{3P}\Delta y_2) \right] \rangle = \\ &= ACF_a(\Delta x_1, \Delta y_1)\end{aligned}\quad (6.77)$$

являє собою автокореляційну функцію амплітуди поля у вхідній площині КОС.

Підставимо функцію (6.77) до виразу (6.73) і подаємо його у вигляді

$$\begin{aligned}E(x_3, y_3) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} ACF_a(\Delta x_1, \Delta y_1) V(x_1, y_1) t_o(x_1, y_1) \times \\ &\times V^*(x_1 - \Delta x_1, y_1 - \Delta y_1) t_o^*(x_1 - \Delta x_1, y_1 - \Delta y_1) \times \\ &\times \exp[-j2\pi\mu(x_3\Delta x_1 + y_3\Delta y_1)] d(\Delta x_1) d(\Delta y_1) dx_1 dy_1.\end{aligned}\quad (6.78)$$

Зробимо позначення у виразі (6.78):

$$\iint_{-\infty}^{\infty} V(x_1, y_1) V^*(x_1 - \Delta x_1, y_1 - \Delta y_1) dx_1 dy_1 = ACF_V(\Delta x_1, \Delta y_1); \quad (6.79)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_1, y_1) t_o^*(x_1 - \Delta x_1, y_1 - \Delta y_1) dx_1 dy_1 = ACF_t(\Delta x_1, \Delta y_1). \quad (6.80)$$

Функції $ACF_V(\Delta x_1, \Delta y_1)$ і $ACF_t(\Delta x_1, \Delta y_1)$ являють собою автокореляційні функції розподілу поля у вхідній площині КОС та амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта. Тоді вираз (6.78) матиме вигляд

$$\begin{aligned}E(x_3, y_3) &= \iint_{-\infty}^{\infty} ACF_a(\Delta x_1, \Delta y_1) ACF_V(\Delta x_1, \Delta y_1) ACF_t(\Delta x_1, \Delta y_1) \times \\ &\times \exp[-j2\pi\mu(x_3\Delta x_1 + y_3\Delta y_1)] d(\Delta x_1) d(\Delta y_1).\end{aligned}\quad (6.81)$$

Отже, розподіл інтенсивності поля у спектральній площині КОС є Фур'є-образом (спектром) добутку функцій $ACF_a(\Delta x_1, \Delta y_1)$ – когерентності випромінювання, $ACF_V(\Delta x_1, \Delta y_1)$ – автокореляційної функції просторового розподілу амплітуд світлового поля у вхідній площині КОС і $ACF_t(\Delta x_1, \Delta y_1)$ – автокореляційної функції амплітудного коефіцієнта пропускання вхідного транспаранта.

Амплітудний коефіцієнт пропускання вхідного транспаранта може бути поданий у вигляді добутку двох взаємонезалежних функцій [39]

$$t_o(x_1, y_1) = t_{os}(x_1, y_1) t_{op}(x_1, y_1), \quad (6.82)$$

де функція $t_{os}(x_1, y_1)$ описує вхідний сигнал, а функція $t_{op}(x_1, y_1)$ – апертуру транспаранта. Автокореляційну функцію транспаранта (6.82) можна подати у

вигляді $ACF_t(\Delta x_1, \Delta y_1) = ACF_{ts}(\Delta x_1, \Delta y_1) ACF_{tp}(\Delta x_1, \Delta y_1)$.

Тоді вираз (6.81) може бути записаний у вигляді двовимірної згортки трьох функцій:

$$\begin{aligned}
 E(x_3, y_3) = & \iint_{-\infty}^{\infty} ACF_a(\Delta x_1, \Delta y_1) ACF_{tp}(\Delta x_1, \Delta y_1) \times \\
 & \times \exp[-j2\pi\mu(x_3\Delta x_1 + y_3\Delta y_1)] d(\Delta x_1) d(\Delta y_1) \otimes \otimes \\
 & \otimes \otimes \iint_{-\infty}^{\infty} ACF_{ts}(\Delta x_1, \Delta y_1) \times \\
 & \times \exp[-j2\pi\mu(x_3\Delta x_1 + y_3\Delta y_1)] d(\Delta x_1) d(\Delta y_1) \otimes \otimes \\
 & \otimes \otimes \iint_{-\infty}^{\infty} ACF_v(\Delta x_1, \Delta y_1) \times \\
 & \times \exp[-j2\pi\mu(x_3\Delta x_1 + y_3\Delta y_1)] d(\Delta x_1) d(\Delta y_1).
 \end{aligned} \tag{6.83}$$

Перша функція описує імпульсний відгук оптичної системи КОС з обмеженою будь-якою за формою і розміром апертурою вхідного транспаранта, який освітлюється квазімонохроматичним випромінюванням, друга функція описує енергетичний спектр досліджуваного сигналу, а третя – операційні властивості оптичної системи КОС залежно від просторового розподілу амплітуди поля, що освітлює вхідний транспарант.

Для спрощення математичних перетворень розглянемо одновимірний випадок для виразу (6.83), тобто

$$\begin{aligned}
 E(x_3) = & \int_{-\infty}^{\infty} ACF_a(\Delta x_1) ACF_{tp}(\Delta x_1) \text{Exp}(-j2\pi\mu x_3 \Delta x_1) d(\Delta x_1) \otimes \\
 & \otimes \int_{-\infty}^{\infty} ACF_{ts}(\Delta x_1) \text{Exp}(-j2\pi\mu x_3 \Delta x_1) d(\Delta x_1) \otimes \\
 & \otimes \int_{-\infty}^{\infty} ACF_v(\Delta x_1) \text{Exp}(-j2\pi\mu x_3 \Delta x_1) d(\Delta x_1).
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

Розглянемо більш детально першу функцію співвідношення (6.84) стосовно типових апертур вхідного транспаранта КОС. У монографії [37] показано, що автокореляційна функція $ACF_a(\Delta x_1)$ часової когерентності випромінювання, яка являє собою обмежені цуги синусоїдальних хвиль з частотою ν_0 і тривалістю Δt , відмінна від нуля лише в інтервалі часу $\Delta t < \frac{x_{3P}\Delta x_1}{cl_{23}}$. Оскільки лише в цей проміжок часу цуги перекриваються, то ця функція має вигляд

$$ACF_a(\Delta x_1) = \begin{cases} 1 - \frac{x_{3P}|\Delta x_1|}{cl_{23}\Delta t}, & \text{коли } |\Delta x_1| \leq \frac{cl_{23}\Delta t}{x_{3P}}; \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{6.85}$$

де $c\Delta t$ – довжина цуга, або довжина когерентності випромінювання,

$$c\Delta t = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}, \quad (6.86)$$

де $\Delta\lambda$ – ширина спектра випромінювання відносно довжини хвилі λ_0 на рівні 0,5 максимальної амплітуди.

За рівномірного освітлення вхідної площини КОС

$$ACF_V(\Delta x_1) = E_0 \delta(\Delta x_1), \quad (6.87)$$

де E_0 – інтенсивність світлової хвилі.

Для транспаранта з прямокутною апертурою $V_o \times W_o$ одновимірна функція пропускання має вигляд

$$t_{op}(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{коли } |x_1| \leq V_o/2; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.88)$$

Автокореляційна функція коефіцієнта пропускання (6.88) має вигляд

$$ACF_{tp}(\Delta x_1) = \begin{cases} 1 - \frac{|\Delta x_1|}{V_o}, & \text{коли } |\Delta x_1| \leq V_o; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.89)$$

Отже, імпульсний відгук оптичної системи КОС з обмеженою за розмірами апертурою вхідного транспаранта може бути поданий у такому вигляді:

$$\begin{aligned} h_{sa}(\mu x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} ACF_a(\Delta x_1) ACF_{tp}(\Delta x_1) \exp(-j2\pi\mu x_3 \Delta x_1) d(\Delta x_1) = \\ &= \int_{-\Delta x_{10}}^{\Delta x_{10}} \left(1 - \frac{x_{3P} |\Delta x_1|}{cl_{23}\Delta t}\right) \left(1 - \frac{|\Delta x_1|}{V_o}\right) \exp(-j2\pi\mu x_3 \Delta x_1) d(\Delta x_1), \end{aligned} \quad (6.90)$$

де межі інтегрування визначаються із функцій (6.85) і (6.89), тобто

$$\Delta x_{10} = \min \left\{ \frac{cl_{23}\Delta t}{x_{3P}}; V_o \right\}.$$

Після обчислення інтеграла (6.90) отримаємо

$$\begin{aligned} h_{sa}(\mu x_3) &= \frac{2}{q_{sa} V_o (\mu x_3)^2} \times \\ &\times \left[(q_{sa} + 1) - (q_{sa} - 1) \cos(V_o \mu x_3) - 2 \frac{\sin(V_o \mu x_3)}{V_o \mu x_3} \right], \end{aligned} \quad (6.91)$$

$$\text{де } q_{sa} = \frac{l_{23}\lambda_0^2}{V_o \Delta\lambda x_3}.$$

Функція (6.91) має максимальне значення на оптичній осі системи за $r_3 = 0$: $h_{sa}(0) = V_o$, тому нормований імпульсний відгук буде описуватись функцією

$$h_{sa,n}(\mu x_3) = \frac{2}{q_{sa}(\mu V_o x_3)^2} \times \left[(q_{sa} + 1) - (q_{sa} - 1) \cos(V_o \mu x_3) - 2 \frac{\sin(V_o \mu x_3)}{V_o \mu x_3} \right]. \quad (6.92)$$

Аналіз функції (6.92) було виконано числовими методами з допомогою комп'ютера, а результати подані графічно на рис. 6.9 і 6.10 в лінійному та логарифмічному масштабах відповідно. Із графіків видно, що залежно від геометричних параметрів оптичної системи, довжини хвилі λ_0 і ширини спектра $\Delta\lambda$ джерела випромінювання, а також ширини $2V_o$ апертури вхідного транспаранта, які визначають параметр q_{sa} , функція $h_{sa,n}(\mu x_3)$ може бути у граничних випадках або монотонно спадною, або осцилюючою з періодом $2\pi = V_o \mu x_3$, причому амплітуди мінімумів функції $h_{sa,n}(\mu x_3)$ описуються співвідношенням

$$h_{sa,n,m}^{\min} = \frac{V_o}{\pi^2 m^2 q_{sa}}, \quad (6.93)$$

де $m = 1, 2, \dots$ – порядковий номер мінімуму. Крім того, зі зменшенням параметра q_{sa} , що спостерігається при розширенні спектра $\Delta\lambda$ випромінювання в освітлювальному пучку, відбувається розширення імпульсного відгуку від дифракційної межі, яка визначається розміром V_o апертури вхідного транспаранта.

Отже, на основі отриманих результатів можна зробити такі висновки:

- у разі освітлення вхідного транспаранта квазімонохроматичним випромінюванням імпульсний відгук КОС розширюється зі збільшенням ширини $\Delta\lambda$ спектра випромінювання;
- зі збільшенням ширини $\Delta\lambda$ спектра випромінювання зменшуються амплітуди бокових мінімумів і збільшуються амплітуди бокових максимумів у дальній області імпульсного відгуку, тобто він трансформується з осцилюючого в монотонно спадний;
- зі збільшенням ширини $\Delta\lambda$ спектра випромінювання зменшується амплітуда імпульсного відгуку на осі оптичної системи.

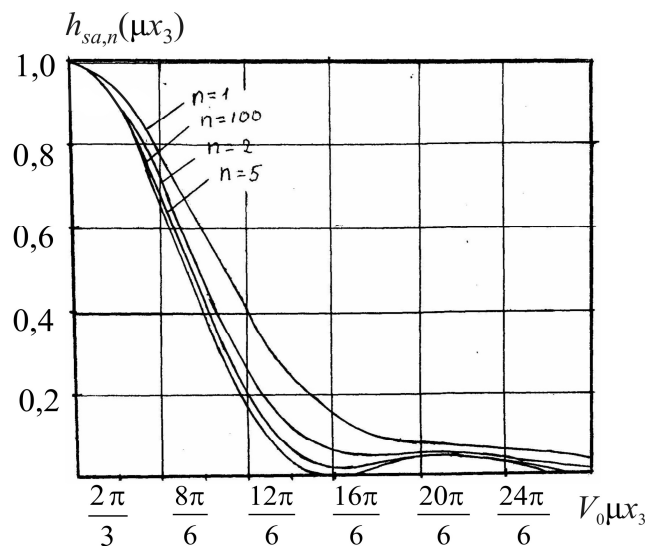


Рис. 6.9. Нормована функція імпульсного відгуку КОС

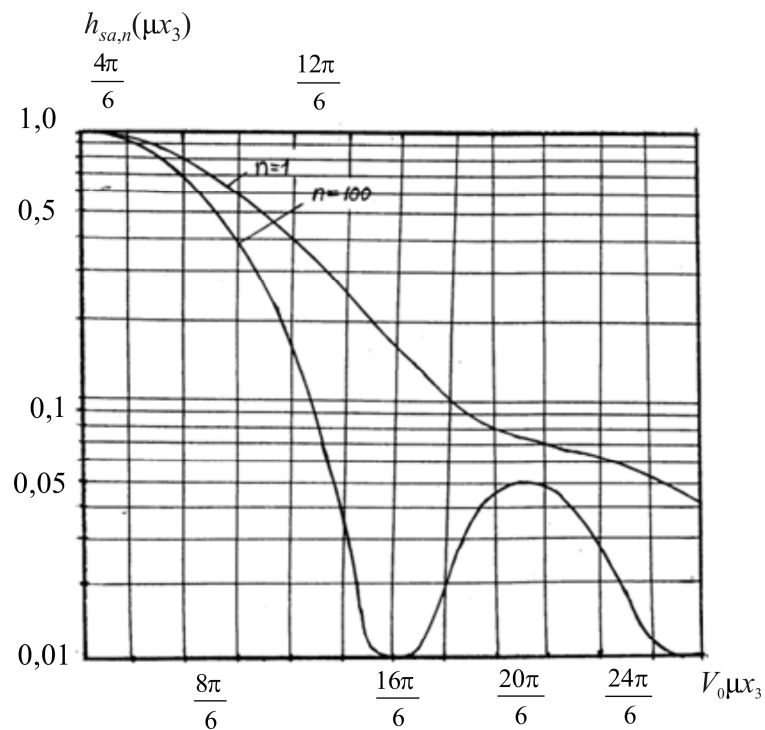


Рис. 6.10. Функція імпульсного відгуку в логарифмічному масштабі

6.3. Параксіальна дифракційна лінза, як оптичний елемент, що виконує перетворення Фур'є

В підрозділі 5.7 було показано, що в дифракційній лінзі, апертурна діафрагма якої розташована в передній фокальній площині, а об'єкт знаходиться в нескінченності, відсутня дисторсія, тобто справедливе

співвідношення $y = f \sin \theta$, а точніше $y = f \tan \theta$. Це забезпечує лінійне перетворення усіх просторових частот об'єкта. За таких умов поперечна аберація третього порядку визначається як

$$\Delta y = f \sin \theta - f \tan \theta \approx f \left[\left(\theta - \frac{1}{6} \theta^3 + \dots \right) - \left(\theta + \frac{1}{3} \theta^3 + \dots \right) \right] = -\frac{1}{2} f \theta^3. \quad (6.94)$$

З точки зору поперечних аберацій третього порядку дисторсія визначається як

$$\Delta y = \sigma_5 h^3, \quad (6.95)$$

де σ_5 – коефіцієнт похибки; h – нормована висота. Із співвідношень (5.200) і (6.95) можна отримати взаємозв'язок між коефіцієнтами σ_5 і S_V^* :

$$\sigma_5 = \frac{S_V^*}{2n'u'}, \quad (6.96)$$

де n' і u' – показник заломлення і кут маргінального променя в просторі зображення. Таким чином, використовуючи рівняння (5.203) і (6.96) при $n' = 1$ і $u' = -y/f$ знаходимо, що

$$\sigma_5 = -\frac{1}{2} f \omega^3. \quad (6.97)$$

Так як $h = \theta/\theta_{max} = \theta/\omega$, то ДЛ лінза в межах аберацій третього порядку формує зображення з висотою згідно правила $y = f \sin \theta$, що робить її ідеальною в якості фур'є-об'єктива.

Особливістю телецентричної ДЛ за відсутності дисторсії є те, що вона створює рівномірну освітленість по усій площині зображення, на відміну від закону $\cos^4 \omega$ для традиційних об'єктивів.

Невиправна (залишкова) сферична аберація визначає максимально допустимий діаметр апертурної діафрагми дифракційно-лінзової системи. За критерієм Марешаля максимально допустиме відхилення хвильового фронту від ідеального для «найкращого» положення фокальної площини забезпечує найбільш допустиме значення сферичної аберації $0,95\lambda$. Використовуючи рівняння (5.196) і (5.204), отримаємо допустиме за критерієм Марешаля значення діаметра апертурної діафрагми

$$D_l = 2y \leq 2\sqrt[4]{7,6f^3\lambda}. \quad (6.98)$$

Важливою характеристикою когерентного спектроаналізатора є просторова смуга пропускання SBP (Space Bandwidth Product), яка визначається числом роздільних точок, котре здатна формувати спектроаналізатор [28]. Найбільша просторова частота $\nu_{y,max} = \nu_{res}$, яку розділяє ДЛ, визначається найбільшим кутом дифракції ґратки $\varphi_d = \theta_{max}$ (рис. 6.11). При нормальному падінні плоскої хвилі на дифракційну ґратку, яка розташована в передній фокальній площині лінзи, для першого порядку дифракції із основного рівняння ґратки маємо $d \sin \theta = \lambda$, де $d = 1/\nu_{res}$ – період дифракційної ґратки. Звідки

$$\nu_{res} = \frac{1}{d} = \frac{1}{\lambda} \sin \theta_{max}. \quad (6.99)$$

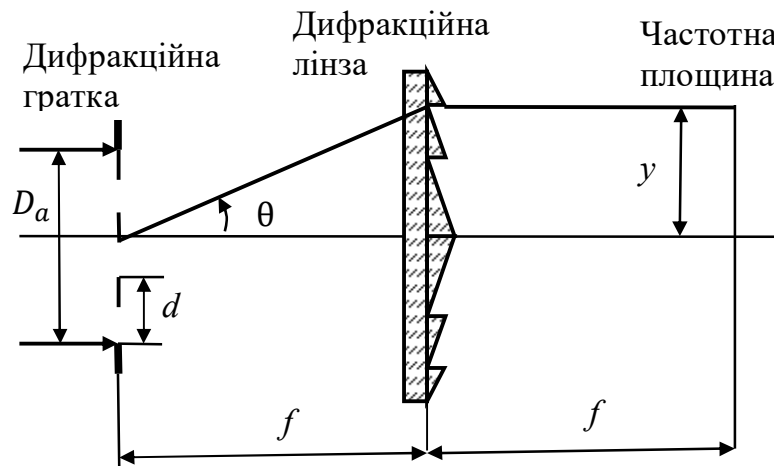


Рис. 6.11. Оптична схема для визначення просторового розділення когерентного спектроаналізатора на основі телецентричної дифракційної лінзи

Використовуючи формулу (5.205) для кута θ_{max} , найбільша просторова частота, за якої не відбувається він'єсування, дорівнює

$$\nu_{res} = \frac{1}{\lambda} \sin \left\{ \arctg \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_s} \right) \right] \right\}. \quad (6.100)$$

де $k_l = f/D_l$ і $k_s = f/2y$ – діафрагмові числа лінзи і оптичної системи.

Для малих кутів дифракції, коли $\sin \theta \approx \tg \theta$, рівняння (6.100) спрощується

$$\nu_{res} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_s} \right). \quad (6.101)$$

Таким чином, для одновимірного випадку ширина смуги пропускання просторових частот для малих кутів дифракції визначається за формулою

$$SBP = 2yv_{res} = \frac{y}{\lambda} \left(\frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_s} \right), \quad (6.102)$$

де y – задовольняє умові (6.5). Наприклад, якщо $f = 250$ мм, $\lambda = 0,65756$ нм, $k_l = 3$ і $k_s = 8,3$ (тобто $y = 15$ мм), $SBP = 5400$. Для порівняння, кращий шестилінзовий фур'є-об'єктив фірми Matsui має просторове розділення 5200.

Із формули (6.102) випливає, що збільшити ширину смуги пропускання SBP можна за рахунок збільшення розміру об'єкта y . Однак збільшення розміру об'єкта, тобто зменшення діафрагмового числа системи $k_s = f/2y$, призводить до зменшення кута θ_{max} , тобто до зменшення просторового розділення v_{res} згідно формули (6.99). Таким чином, можна знайти діаметр апертурної діафрагми, який забезпечує максимальну смугу пропускання SBP . З урахуванням того, що $k_s = f/2y$, запишемо функцію (6.102) у вигляді

$$SBP = \frac{y}{\lambda} \left(\frac{1}{k_l} - \frac{2y}{f} \right). \quad (6.103)$$

Максимальне значення функції $SBP(y)$ знаходимо із рівняння $d[SBP(y)]/dy = 0$. Звідси маємо

$$k_s = \frac{f}{2y} = 2k_l, \text{ або } 2D_a = D_l. \quad (6.104)$$

Таким чином, максимум просторової смуги пропускання настає тоді, коли діаметр апертурної діафрагми дорівнює половині діаметра діаметру лінзи.

До цього часу ми припускали, що ДЛ пропускає когерентне світло з довжиною хвилі λ_0 , коли її дифракційна ефективність максимальна. Однак, кому і астигматизм можна вилучити для будь-якої довжини хвилі λ , розташувавши апертурну діафрагму на відстані

$$t(\lambda) = \frac{\lambda_0}{\lambda} f. \quad (6.105)$$

При цьому положення фокальної площини також залежить від довжини хвилі згідно рівнянню (5.189). Таким чином, одиночну ДЛ можна використовувати

в системі з декількома лазерними джерелами випромінювання. Дифракційна ефективність такої системи буде більшою за 80% за умови $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} > 0,5$.

6.4. Приклади розрахунку характеристик когерентних спектроаналізаторів

Приклад 6.1. Когерентний спектроаналізатор має такі вихідні:

- параметри лазера: довжина хвилі $\lambda = 635$ нм, потужність $\Phi = 4,5$ мВт;
- параметри Фур'є-об'єктива: діаметр входної зіниці $D_p = 57,6$ мм, фокусна відстань $f = 160$ мм, коефіцієнт пропускання на довжині хвилі $\lambda = 635$ нм $\tau_o = 0,8$;
- розмір входного транспаранта $a \times b = 26 \times 26$ мм²;
- еталонний входний сигнал – квадратний отвір розміром $0,1 \times 0,1$ мм²;
- параметри ПЗЗ-матриці: розмір пікселя $V_D \times W_D = 14 \times 14$ мкм²; час накопичення $T_i = 33$ мс; напруга шумового сигналу $u_n = 200$ мкВ; чутливість на довжині хвилі 635 нм $R_D = 6$ В·см²/мкДж.

Розв'язання. Для знаходження робочого діапазону просторових частот знайдемо граничні просторові частоти, які розраховуються за формулами (6.33):

$$\nu_{x,max1} = \frac{57,6-26}{2 \cdot 635 \cdot 10^{-6} \cdot 160} = 156 \text{ мм}^{-1}; \quad \nu_{x,max2} = \frac{57,6+26}{2 \cdot 635 \cdot 10^{-6} \cdot 160} = 411 \text{ мм}^{-1}.$$

Таким чином, від 0 до 156 мм⁻¹ віньєтування в системі відсутнє, а в межах від 156 мм⁻¹ до 411 мм⁻¹ – змінюється від 1 до 0. За межами частоти 411 мм⁻¹ сигнал буде відсутній.

Просторову смугу пропускання знаходимо за формулою (6.35):

$$SBP = \frac{26}{635 \cdot 10^{-6}} \sin \left(\arctg \frac{57,6-26}{2 \cdot 160} \right) = 402.$$

Знайдемо за формулою (6.38) мінімальне просторове розділення входного сигналу, що реєструється одним пікселем:

$$\Delta \nu_x = \frac{2 \cdot 14 \cdot 10^{-3}}{635 \cdot 10^{-6} \cdot 160} = 0,276 \text{ мм}^{-1}.$$

Алгоритм розрахунку відношення сигнал/шум наступний:

1. Розраховуємо за відомими методиками освітленість транспаранта:

$$E_0 = \frac{\Phi}{A_{tp}} k_e = \frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{26 \cdot 26 \cdot 10^{-6}} 0,5 = 3,33 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

де $k_e = 0,5$ – коефіцієнт ефективності освітлювальної системи КОС, яка забезпечує рівномірність освітлення вхідного транспаранту; A_{tp} – площа вхідного транспаранта.

2. За формулою (6.46) знаходимо освітленість ПЗЗ-матриці в області, де знаходиться частота Найквіста уздовж координати x_3 :

$$E(x_{3N}, 0) = 0,8 \cdot 3,33 \left(\frac{0,1 \cdot 0,1}{635 \cdot 10^{-6} \cdot 160} \right)^2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 = 1,05 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

3. За формулою (6.47) знаходимо експозицію:

$$H = 1,05 \cdot 10^{-2} \cdot 33 \cdot 10^{-3} = 3,46 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

4. За формулою (6.48) розраховуємо величину сигналу на виході ПЗЗ-матриці:

$$u_s = 600 \cdot 3,46 \cdot 10^{-4} = 0,21 \text{ В}.$$

5. Тоді відношення сигнал/шум дорівнює:

$$SNR = \frac{0,21}{200 \cdot 10^{-6}} = 1050.$$

Приклад 6.2. У передній фокальній площині об'єктива з фокусною відстанню f встановлено круглу діафрагму радіусом r_0 . Діафрагма освітлюється гауссовим лазерним пучком, який має у площині діафрагми діаметр $2\omega_l$. Визначте розподіл інтенсивності у задній фокальній площині об'єктива за умови, що діаметр вхідної зіниці об'єктива набагато більший за діаметр діафрагми.

Розв'язання. Оскільки діаметр діафрагми набагато менший за діаметр вхідної зіниці об'єктива, то віньєтуванням в оптичній системі можна знехтувати. У цьому випадку розподіл амплітуди поля в задній фокальній площині знаходять за формулою (3.36), яку подамо у вигляді

$$V(x_4, y_4) = \frac{1}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x_2, y_2) \exp \left[-j \frac{2\pi}{j\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2, \quad (6.106)$$

де $V(x_2, y_2)$ – розподіл амплітуди поля в отворі діафрагми,

$$\begin{aligned}
V(x_2, y_2) &= V_0 \exp\left(-\frac{x_2^2 + y_2^2}{\omega_l^2}\right) \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{r_0}\right) = \\
&= V_0 \exp\left(-\frac{r_2^2}{\omega_l^2}\right) \text{circ}\left(\frac{r_2}{r_0}\right);
\end{aligned} \tag{6.107}$$

V_0 – амплітуда поля в центрі діафрагми; $\text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right)$ – колова функція,

$$\text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right) = \begin{cases} 1, & \text{коли } 0 \leq r \leq r_0; \\ 0, & \text{коли } r > r_0. \end{cases}$$

Оскільки розподіл поля (6.107) є вісесиметричною функцією, то подамо співвідношення (6.106) у вигляді перетворення Фур'є-Бесселя:

$$V(r_4) = \frac{2\pi}{j\lambda f} \int_0^\infty V(r_2) J_0\left(\frac{2\pi r_4}{\lambda f} r_2\right) r_2 dr_2. \tag{6.108}$$

Підставимо амплітуду поля (6.107) в інтеграл (6.108):

$$V(r_4) = \frac{2\pi V_0}{j\lambda f} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r_2^2}{\omega_l^2}\right) \text{circ}\left(\frac{r_2}{r_0}\right) J_0\left(\frac{2\pi r_4}{\lambda f} r_2\right) r_2 dr_2. \tag{6.109}$$

Інтеграл (6.109) являє собою згортку двох функцій:

$$V(r_4) = \frac{V_0}{j\lambda f} [\tilde{f}_1(\nu_r) * \tilde{f}_2(\nu_r)], \tag{6.110}$$

де $f_1(\nu_r)$ – просторовий спектр функції $f_1(r_2) = \exp\left(-\frac{r_2^2}{\omega_l^2}\right)$,

$$\tilde{f}_1(\nu_r) = 2\pi \int_0^\infty f_1(r_2) J_0(2\pi \nu_r r_2) r_2 dr_2; \tag{6.111}$$

$f_2(\nu_r)$ – просторовий спектр функції, $f_2(r_2) = \text{circ}\left(\frac{r_2}{r_0}\right)$,

$$\tilde{f}_2(\nu_r) = 2\pi \int_0^{r_0} J_0(2\pi \nu_r r_2) r_2 dr_2; \tag{6.112}$$

ν_r – просторова частота у полярній системі координат, $\nu_r = \frac{r_4}{\lambda f}$.

Для обчислення інтеграла (6.111) скористаємося табличним інтегралом 2.12.39.3 із довідника [38]:

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} J_\nu(bx) J_\nu(cx) dx = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{b^2 + c^2}{4p}\right) I_\nu\left(\frac{bc}{2p}\right). \tag{6.113}$$

Якщо $c = 0$, $\nu = 0$, то інтеграл (6.113) має вигляд

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} J_0(bx) dx = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{b^2}{4p}\right). \quad (6.114)$$

Замінімо змінні в інтегралі (6.111): $r_2 = x$; $p = \frac{1}{\omega_l^2}$; $b = \frac{2\pi r_4}{\lambda f}$. Тоді, з урахуванням інтеграла (6.114), маємо:

$$\tilde{f}_1(\nu_r) = \pi \omega_l^2 \exp\left[-\left(\frac{2\pi \omega_l}{\lambda f}\right)^2 r_4^2\right]. \quad (6.115)$$

Для обчислення інтеграла (6.112) скористаємося підрозділом 2.7.2:

$$\tilde{f}_2(\nu_r) = \pi r_o^2 \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4\right)}{\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4} \right]. \quad (6.116)$$

Підставимо функції (6.115) і (6.116) в інтеграл (6.110):

$$V(r_4) = \frac{V_0}{j\lambda f} \pi \omega_l^2 \pi r_o^2 \left\{ \exp\left[-\left(\frac{2\pi \omega_l}{\lambda f}\right)^2 r_4^2\right] * \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4\right)}{\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4} \right] \right\}. \quad (6.117)$$

Розподіл інтенсивності у задній фокальній площині об'єктива з урахуванням амплітуди поля (6.117) знайдемо як

$$\begin{aligned} I(r_4) &= |V(r_4)|^2 = \\ &= \left(\frac{V_0 \pi^2 \omega_l^2 r_o^2}{\lambda f} \right)^2 \left\{ \exp\left[-\left(\frac{2\pi \omega_l}{\lambda f}\right)^2 r_4^2\right] * \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4\right)}{\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4} \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (6.118)$$

6.5. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. Предмет, обмежений круглою діафрагмою діаметром d , розміщений у передній фокальній площині додатної лінзи діаметром D . Розподіл інтенсивності вимірюється у задній фокальній площині лінзи. Передбачається, що $d < D$.

Знайдіть вираз для максимальної просторової частоти, для якої вимірювана інтенсивність точно дорівнює квадрату модуля спектра Фур'є предмета. Чому дорівнює ця частота, якщо $D = 4$ см, $d = 2$ см, фокусна

відстань $f = 50$ мм, $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м? Знайдіть значення частоти, вище якого вимірний спектр зникає, незважаючи на те, що спектр предмета може мати відмінні від нуля співвідношення на більш високих частотах.

$$\text{Відповідь: } \nu_{x,\max 1} = \frac{D-d}{2\lambda f} = 333 \text{ мм}^{-1}; \nu_{x,\max 2} = \frac{D+d}{2\lambda f} = 10^3 \text{ мм}^{-1}.$$

Задача 6.2. Нормально падаюча плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди освітлює предмет, максимальний лінійний розмір якого дорівнює d . Предмет встановлений безпосередньо перед додатною лінзою з фокусною відстанню f , діаметр лінзи перевищує d . Через похибку установки розподіл інтенсивності вимірюється у площині, що перебуває на відстані $f - \Delta$ за лінзою (рис. 2.32). Наскільки малою має бути похибка, якщо розподіл інтенсивності, що вимірюється, має точно відтворювати картину дифракції Фраунгофера на предметі?

$$\text{Відповідь: } I(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{\lambda f}\right)^2 \left[\text{sinc}\left(\frac{d}{\lambda f} x_0\right)\right]^4.$$

Задача 6.3. Когерентний оптичний спектроаналізатор використовує гелій-неоновий лазер з довжиною хвилі випромінювання $\lambda = 0,628$ мкм і

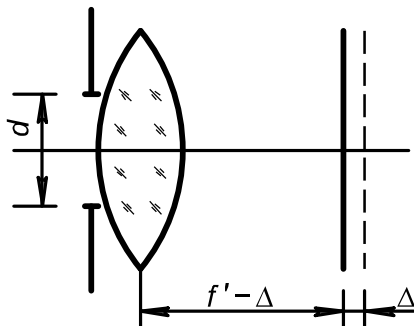


Рис. 6.12. До задачі 6.3

дифракційно обмежений Фур'є-об'єктив з фокусною відстанню $f = 100$ мм і діаметром вхідної зіниці $D_p = 50$ мм. В задній фокальній площині об'єктива встановлена ПЗЗ-матриця, яка має пікселі розміром $V_D \times W_D = 7 \times 7$ мкм. Вхідний транспарант діаметром $D_0 = 50$ мм розташований в передній фокальній площині

об'єктива. Визначте просторове спектральне розділення спектроаналізатора, яке обмежене оптичною системою (абераціями) або ПЗЗ-матрицею (пікселем). Порівняйте отримані результати.

$$\text{Відповідь: } \nu_{res1} = \frac{1}{2r_E} = \frac{D_0}{2,44\lambda f} = 326 \text{ мм}^{-1}; \nu_{res2} = \nu_N = \frac{1}{2V_D} = 71 \text{ мм}^{-1}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Физический энциклопедический словарь* / Гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Сов.энциклопедия, 1984. – 944 с.
2. *Борн М. Основы оптики* / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
3. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стинга; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
4. *Прудников А. П. Интегралы и ряды. Элементарные функции* / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
5. *Сороко Л. М. Основы когерентной оптики и голографии* / Л. М. Сороко. – М.: Наука, 1971. – 615 с.
6. *Колобродов В.Г. Проектування тепловізійних і телевізійних систем спостереження: підруч.* / В.Г.Колобродов, М.І. Лихоліт.– К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 364 с. – 500 пр. – ISBN966-622-230-2.
7. *Бегунов Б. Н. Теория оптических систем* /Б. Н. Бегунов, Н. П. Заказнов, С. И. Кирюшин, В. И. Кузичев. – М.: Машиностроение, 1981. – 432 с.
8. *Порфирьев Л.Ф. Основы теории преобразования сигналов в оптико-электронных системах: учебник* / Л.Ф. Порфирьев. – Л.: Машиностроение, 1989. – 387 с. – ISBN 5-217-00365-0.
9. *Ersoy Okan K. Diffraction, Fourier Optics and Imaging* / Okan K. Ersoy. – Canada.: John Wiley & Sons, 2007. – 428 p.
10. *Sheng Yuniong. Diffractive optics* / Yuniong Sheng, Pierre Ambs // *Optical Engineering*. – 2004. – Vol. 43. – N 11. – P. 2503–2504.
11. *Шредер Г. Техническая оптика* / Г. Шредер, Х. Трайберх.– М.: Техносфера, 2006. – 424 с. – 3 000 экз. – ISBN 94836-075-X.
12. *Колобродов В. Г. Дифракційна теорія оптичних систем: підруч.* / В. Г. Колобродов, Г. С.Тимчик.– К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 148 с. – 300 пр. – ISBN 978-966-622-415-9.
13. *Сойфер В. А. Компьютерная оптика* / В. А. Сойфер // *Соросовский образовательный журнал*. – Ч. 1. Дифракционные оптические элементы. –

1999. – № 4. – С. 110–115. – 40 000 экз. – ISSN 1684-9876.

14. *O'Shea D.C.* Diffractive Optics Design, Fabrication and Test / D.C.O'Shea, T.J. Suleski, A.D. Kathman, D.W. Prather.– SPIE PRESS, Washington USA, 2005. – 238 p.

15. *Кольер Р.* Оптическая голография /Р. Кольер, К. Беркхарт, Л. Лин. – М.: Мир, 1973. – 686 с.

16. *Futhey JohnA.* Diffractive bifocal intraocular lens / JohnA. Futhey // Proceedings SPIE. – 1989. – Vol. 1052. – P. 142–149.

17. Дифракционная компьютерная оптика / под.ред. В. А. Сойфера. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

18. *Buralli D. A.* Optical performance of holographic kinoforms / D. A. Buralli, G. M. Morris, J. B. Rogers // Applied Optics. – 1989. – Vol. 28. – N 5. – P. 976–983.

19. *Ленкова Г. А.* Фазовая линза Френеля в сходящемся световом пучке / Г. А. Ленкова // Сб. трудов IX Междунар. конф. «Прикладная оптика – 2010» (С.П.); Изд. опт.общ. им. Д. С. Рождественского, 2010. – Ч. 1. – С. 151–155.

20. *Erismann Fernand.* Design of a plastic aspheric Fresnel lens with a spherical shape / Fernand Erismann. – Optical Engineering. – 1997. – Vol. 36(4). – P. 988–991.

21. *Колобродов В.Г.* Проектування пластикових лінз Френеля зі сферичним профілем / Є.Г. Балінський, І.В. Голюк, В.Г. Колобродов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2013. – №1. – С. 66–70.

22. *Колобродов В.Г.* Оптичні системи космічних багато спектральних сканерів. В.Г. Колобродов, В.М. Тягур, М.І. Лихоліт // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2006. – №6. – С. 125–132.

23. *Bao N.K.* Adjacent sequence iteration method for designing a diffractive element with function of long focal depth / N.K.Bao, Chen Zhongyu, Chen Yansong // Optical Engineering. – 2004. – Vol. 43. – N 10. – P. 2348–2352.

24. *Коронкевич В. П.* Новое поколение бифокальных дифракционно-

рефракционных линз /В. П. Коронкевич, Г. А. Ленкова, В. П. Корольков, А. Г. Полещук и др. // Компьютерная оптика. – 2008. – № 1. – Т. 32. – С. 50–58.

25. Пат. 2186417 Российской Федерации, мпк G02C7/04, A61F2/16, G02B3/08, G02B13/18. Дифракционная интраокулярная линза / В. П. Коронкевич, Г. А. Ленкова, И. А. Исаков, С. Н. Федоров; заявитель и патентообладатель Ин-т автоматизации и электрометрии СО РАН. – № 2000104268/28; заявл. 22.02.2000; опубл. 27.07.2002, Бюл. № 23 (И.). – 35 с. :ил.

26. *Vatle P.J.* Visual axial PSF of diffractive trifocal lenses / P.J. Vatle, J.E. Oti, V.F. Canales M.P. and Cagigal // Optical Society of America. – 2005. – Vol. 13, No 7 / OPTICS EXPRESS. – P. 2782–2792.

27. *Buralli D.A.* Design of diffractive singlets for monochromatic imaging / D.A. Buralli, G.M. Morris // Applied Optics. – 1991. Vol. 30. – No 16. – P. 2151–2158.

28. Buralli D.A., Morris G.M. Design of a wide field diffractive landscape lens // Applied Optics. – 1989. – Vol. 28, No. 18. – P. 3950 – 3959.

29. Castignoles F., Flury M., Lepine T. Comparison of the efficiency, MTF and chromatic properties of four diffractive bifocal intraocular lens designs // Optical Society of America. – 2010. – Vol. 18. – No 5. – P. 5245–5256.

30. *Клевцов Ю. А.* Метод расчета рефракционно-дифракционных очковых линз / Ю. А. Клевцов // Автометрия. – 2008. – Т. 44. – № 4. – С. 105–118.

31. ISO/DIS 11979-2. Optics and Optical Instruments – Intraocular lenses. Pt.2: Optical properties and their Methods. 1996.

32. G.A. Lenkova. Methods for Investigating Optical Characteristics of Bifocal Diffractive-Refractive Intraocular Lenses. // Optoelectronics, Instrumentation and data Processing. – 2007. – Vol. 43. – No 3. – P. 262–273.

31. *Юу Ф. Т. С.* Введение в теорию дифракции, обработку информации и голографию / Ф. Т. С. Юу; под ред. В. К. Соколова; пер. с англ. – М.:

Сов.радио, 1979. – 304 с.

32. *Кейсесент Д.* Оптическая обработка информации / Д. Кейсесент; пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 350 с.

33. *Колобродов В. Г.* Анализ оптических схем когерентных спектроанализаторов /В. Г. Колобродов, Г. С. Тымчик // Оптико-механическая промышленность. – 1982. – № 10. – С. 4–7.

34. *Колобродов В. Г.* Погрешность сборки и юстировки оптической системы когерентного спектроанализатора / В. Г. Колобродов, Г. С. Тымчик, С. П. Сахно// Оптико-механическая промышленность. – 1983. – № 9. – С. 6–9.

35. *Зверев В.А.* Экспериментальная радиооптика / В.А. Зверев, Н.С. Степанов Н.С – М.: Наука, 1979. – 255 с.

36. *Колобродов В. Г.* Проектування дифракційних оптичних елементів і систем: підруч. / В. Г. Колобродов, Г. С.Тимчик.– К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 196 с. – 300 пр. – ISBN 978-966-622-563-7.

37. *Митрофанов С. А.* Применение лазеров в машиностроении и приборостроении / С. А. Митрофанов, К. И. Крылов, В. Т. Прокопенко. – Л.: Машиностроение, 1978. – 342 с.

38. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

39. *Франсон М.* Когерентность в оптике /М. Франсон, С. Сланский. – М.: Наука, 1967. – 220 с.